

Регуляризация плохо обусловленных задач на основе функционала повышенной чувствительности и визуального анализа его локальных сечений

О. Н. Корсун, А. В. Стуловский

Аннотация—Рассматривается подход к регуляризации плохо обусловленных задач при помощи специального приема - имитации сдвига входного сигнала по времени. Подобные задачи зачастую возникают из-за структурных различий между моделью и реальным объектом, что приводит к погрешностям при обработке экспериментальных данных. Если ошибки независимы, то их легко обнаружить и, во многих случаях, исключить, в то время как выявление коррелированных ошибок затруднено. Предлагаемый подход стремится нарушить коллинеарность помехи и основного сигнала, что позволяет применять стандартные методы идентификации. Кроме того, при варьировании величины смещения удается получить множество реализаций, тем самым увеличив объем данных, доступных для обработки, и применить статистические подходы. В частности, предлагается использовать функционал, построенный при помощи среднеквадратичных отклонений оценок параметров модели, который оказывается более чувствителен к коррелированным погрешностям по сравнению со стандартным функционалом, составленным из невзвешенных квадратов рассогласований, и позволяет повысить качество оценок параметров. Так как подробный анализ поверхностей уровня функционала требует существенных затрат времени и вычислительных ресурсов, предлагается рассмотреть локальные сечения меньшей размерности. Результативность подхода показана на примере задачи раздельной идентификации силы тяги и коэффициентов силы сопротивления. Предложенная регуляризация позволила заметно уменьшить ошибки в оценке модельных параметров: с 4.5% до 0.7-1.7% в случае постоянного коэффициента силы сопротивления и с 6.5% до 0.5-1.5% в случае силы тяги. Исследование выполнено на данных авиационного моделирующего стенда.

Ключевые слова — идентификация, плохо обусловленная задача, регуляризация, стендовое моделирование.

I. ВВЕДЕНИЕ

На практике, учитывая рост доступных исследователю данных, часто приходится сталкиваться с плохо обусловленными задачами [1], для которых применение

Статья получена 25 февраля 2026. Исследование выполнено при финансовой поддержке Министерства науки и высшего образования Российской Федерации в рамках соглашения № 075-15-2025-606

Корсун О. Н.: ФАУ ГосНИИАС, Москва (e-mail: marmotto@rambler.ru).

Стуловский А. В.: ФАУ ГосНИИАС, Москва (e-mail: avstlv@gosniias.ru).

стандартных методов теории идентификации [2] приводит к существенным ошибкам в решениях, особенно при наличии погрешностей.

Одним из примеров такой задачи является задача раздельной идентификации эффективной силы тяги двигателя и коэффициентов силы сопротивления. Ее практическое значение обусловлено тем, что тяга – это один из ключевых параметров летательного аппарата (ЛА), влияющий на его основные характеристики. Поэтому летные испытания часто включают в себя этап уточнения значений тяги. Однако непосредственно ее измерение в ходе летных экспериментов, как правило, невозможно, из-за высокой коллинеарности между векторами тяги и силы аэродинамического сопротивления на малых углах атаки. Необходимость получения раздельных оценок данных сил и приводит к постановке плохо обусловленной задачи.

Для ее решения выработано множество подходов, начиная от расчета тяги на основе газодинамических моделей двигателей [3], применения численной аэродинамики и заканчивая целевой разработкой таких условий эксперимента, которые способствовали бы раздельному оцениванию сил [4].

Подход, рассматриваемый в данной статье, стремится решить плохо обусловленную задачу на основе доступных экспериментальных данных, и в этом отношении следует в направлении методов регуляризации, например, по Тихонову [2]. Его преимуществом является применимость к послеполетной обработке данных, что не требует внесения изменения в ход самого летного эксперимента.

Этот подход к регуляризации, ранее использовавшийся в [5], основан на имитации сдвига по времени входного сигнала. Цель смещения состоит в том, чтобы разделить внешние помехи и целевой сигнал, что возможно при условии независимости динамики самой системы от времени. Кроме того, это позволяет рассмотреть вместо одной реализации процесса функционирования системы целое их семейство, порождаемое разными продолжительностями сдвига. Затем на основе данных нескольких реализаций, формируется функционал, определяемый среднеквадратичным отклонением (СКО) значений параметров, и выполняется его минимизация для уточнения решения исходной задачи.

Работоспособность предложенного метода показана на примере оценки эффективной тяги двигателя и коэффициентов силы сопротивления.

II. ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ

Сформулируем задачу раздельной идентификации силы тяги и коэффициентов силы сопротивления [4, 6]. Рассмотрим уравнение сил, которые действуют на ЛА вдоль оси ОХ связанной системы координат:

$$P_x(t) = mgn_x(t) + c_x(t)q(t)S, \quad (1)$$

где $P_x(t)$ - проекция силы тяги; $n_x(t)$ - продольная составляющая вектора перегрузки; $c_x(t)$ - коэффициент продольной аэродинамической силы; $q(t)$ - скоростной напор; m - масса ЛА; S - эквивалентная площадь крыла.

Влияние погрешностей на результаты измерений, выполненных в ходе эксперимента, учтем в (1) при помощи дополнительного слагаемого

$$P_x(t) = mgn_x(t) + c_x(t)q(t)S + \varepsilon(t), \quad (2)$$

где $\varepsilon(t)$ - невязка уравнений.

Пусть измерения выполняются в дискретные равноотстоящие моменты времени с шагом Δt и всего доступно N измерений. Предположим, что на длине временного интервала тяга двигателя остается постоянной, а для коэффициента силы сопротивления применим стандартное представление в виде полинома второй степени от угла атаки с постоянными коэффициентами [7, 8]. Тогда

$$P_x(t_j) = P(0), \quad c_x(t_j) = c_{x0} + c_x^\alpha \alpha(t_j) + c_x^{\alpha^2} \alpha^2(t_j) \quad j = 0 \dots N. \quad (3)$$

Уравнения (2) с учетом (3) можно для удобства переписать в матричном виде

$$Fa = mgN_x + \varepsilon, \quad (4)$$

где $F_j = (1 \quad q(t_j)S \quad q(t_j)S\alpha(t_j) \quad q(t_j)S\alpha^2(t_j))$ - j -ая строка матрицы F ; $a^T = (P_x(0) \quad c_{x0} \quad c_x^\alpha \quad c_x^{\alpha^2})$ - вектор оцениваемых параметров.

Конкретизируем вид невязки в системе уравнений (4). Предположим, что данные содержат в себе зависимость от приращения числа Маха, которая не учитывается при составлении регрессионной модели, и, следовательно, является помехой. Для этого подставим в систему (4) следующее выражение

$$\varepsilon(t_j) = K_1 \alpha(t_j) \Delta M(t_j) + K_2 \alpha^2(t_j) \Delta M(t_j), \quad (5)$$

где $\Delta M(t_j) = M(t_j) - M(0)$ - приращение числа Маха в момент времени t_j , K_1, K_2 - постоянные весовые коэффициенты.

Задача состоит в уточнении оценки параметров a .

III. ОПИСАНИЕ ЧИСЛЕННОГО ЭКСПЕРИМЕНТА

Вначале были сгенерированы исходные данные с использованием модели (4)-(5), учитывающей зависимость коэффициента силы сопротивления от числа Маха. Эта неучтенная при выборе параметров регрессионной модели зависимость в данном случае

оказывается помехой. Далее выполнялась идентификация параметров (4) \hat{a} .

Особенность плохо обусловленной задачи состоит в том, что нельзя просто добавить неизвестные слагаемые, зависящие от числа Маха, к регрессорам, так как в этом случае появление любых погрешностей будет заметным образом ухудшать оценки прочих коэффициентов, то есть увеличение размерности вектора состояния дополнительно ухудшит степень обусловленности задачи.

На следующем этапе имитируем сдвиг по времени. Для этого вычисляем левую часть уравнения $F\hat{a}$ с использованием полученных ранее оценок параметров модели. Затем выполнялся сдвиг входных сигналов на время τ . В случае системы (4)-(5) их роль выполняют угол атаки и число Маха. Тогда новые управляющие сигналы u' определяются следующей формулой

$$u'(t) = \begin{cases} u(0), & t < \tau; \\ u(t - \tau), & t \geq \tau. \end{cases}$$

Теперь вычисляем левую часть уравнения для них, после чего находим модельную разность $(F(u') - F\hat{a})$.

Для имитации сдвинутого в эксперименте сигнала добавляем модельную разность к известному сигналу, затем применяем к рассчитанному соотношению идентификацию коэффициентов. Аналогичная процедура повторяется для других значений сдвига по времени τ .

Однако полученные оценки рассчитывались без учета невязки (5), возникающей из-за наличия в данных зависимости от числа Маха. Поэтому сначала требуется найти значения весовых коэффициентов K_1 и K_2 . Для этого выполнялась минимизация функционала качества оценок, который представлял собой СКО отдельных параметров модели, рассчитанное для нескольких значений τ .

Когда были определены значения K_1 и K_2 , доставляющие минимум функционала, слагаемое вида (5) вычиталось из правой части уравнения, к которой затем применялась идентификация параметров a . Полученные на этом этапе оценки считались ответом.

На следующем этапе исследования к сигналу перегрузки в правой части уравнения (4) была добавлена нормально распределенная случайная величина. Ее СКО составляло 0.00033. Это несколько меньше характерных для летных испытаний шумов, но амплитуда помехи при этом оказывается больше или равна наибольшему значению невязки (5), как можно видеть на рисунке 1.

Описанный выше метод теперь был применен для зашумленных сигналов. Был выполнен сдвиг по времени, рассчитаны СКО параметров модели, найдены оценки коэффициентов K_1 и K_2 . Слагаемое (5) с оцененными значениями постоянных коэффициентов исключалось из правой части уравнения (4), после чего выполнялась идентификация вектора параметров a .

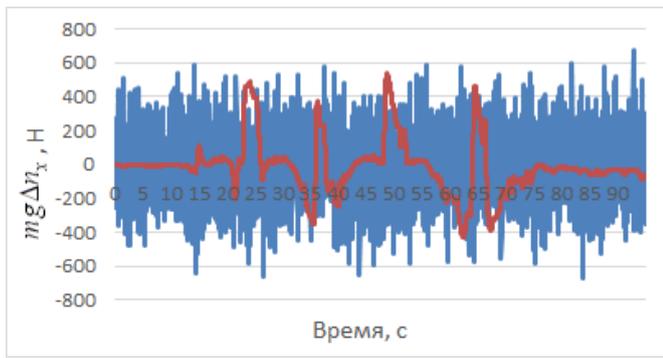


Рис. 1. Сопоставление величины невязки (5) (красная линия) и вклада шума измерений в выходной сигнал продольной перегрузки (синяя)

IV. РЕЗУЛЬТАТЫ

Сначала было оценено влияние погрешности (5) на качество оценки параметров модели (4). Полученные оценки приводятся в таблице I.

Таблица I. Погрешности оценки параметров модели (4) при наличии невязки (5) и без нее

| | Погрешность оценки тяги, % | Погрешность оценки c_{x0} , % |
|-------------|----------------------------|---------------------------------|
| Без невязки | 0.006 | 0.008 |
| С невязкой | 6.6 | 4.6 |

Результаты показывают, что несмотря на малое абсолютное значение погрешности (около 1% от величины полезного сигнала), из-за плохой обусловленности задачи ее включение приводит к заметному ухудшению качества оценок.

В ходе эксперимента рассматривались сдвиги на 3, 6, 9 и 12 с. Таким образом, были получены 4 оценки параметров для сдвинутых во времени сигналов, на основе которых затем рассчитывалось СКО.

Для простоты анализа и наглядности представления не выполнялось исследование полной топологии поверхности, описываемой функционалом качества. Вместо этого рассматривались значения постоянных коэффициентов взятые вдоль ее сечений линиями $K_1 = K_2$ и $K_1 = -K_2$.

При отсутствии шумов оценки СКО для постоянного коэффициента сопротивления приводятся на рисунке 2.

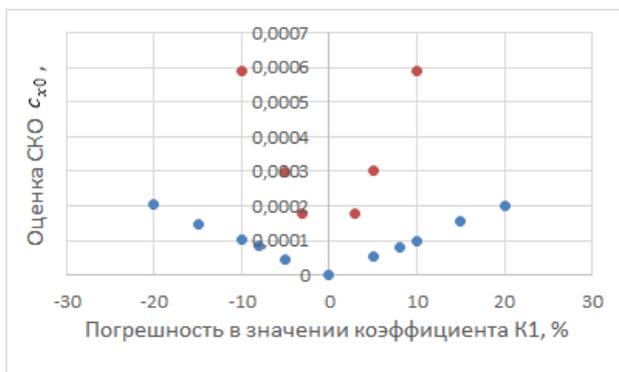


Рис. 2. СКО для оценок постоянного коэффициента силы сопротивления, полученные для $K_1 = K_2$ (синие точки) и $K_1 = -K_2$ (красные)

Следует указать, что аналогичная рисунку 2 картина наблюдалась при рассмотрении СКО как других

коэффициентов силы сопротивления, так и силы тяги. Во всех случаях более выраженный экстремум наблюдался в сечении $K_1 = -K_2$.

При добавлении шума к измерениям перегрузки оценки СКО смещаются от истинного значения параметров. Для постоянного коэффициента силы сопротивления новое расположение оценок СКО приводится на рисунке 3.

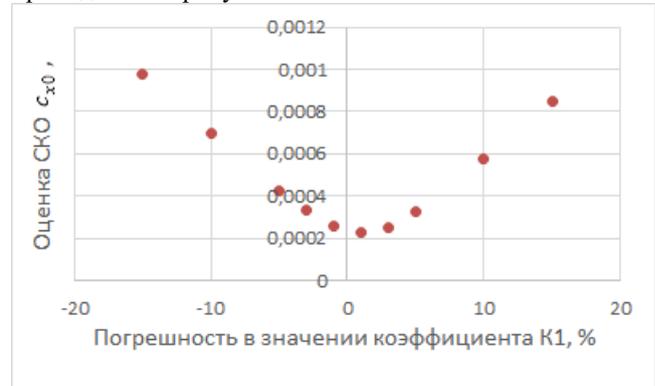


Рис. 3. СКО для оценок постоянного коэффициента силы сопротивления, полученные для $K_1 = -K_2$

По рисунку 3 можно заключить, что, несмотря на существенные погрешности, минимум оценок СКО смещается от истинных значений коэффициентов незначительно порядка единиц процентов. Для остальных коэффициентов силы сопротивления в общем наблюдается схожий эффект. СКО для оценок, полученных вдоль сечения $K_1 = K_2$ не приводится ввиду того, что и до этого слабо выраженная зависимость сглаживается практически в прямую, из-за чего нахождение экстремума функционала оказывается затруднено. Интересно отметить, что для силы тяги минимум СКО оказывается сильно смещен, как это можно видеть на рисунке 4.

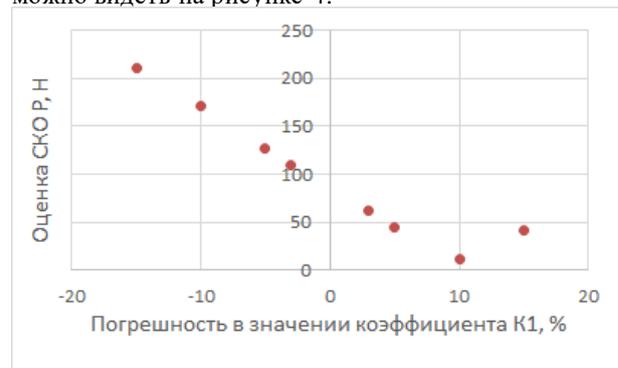


Рис. 4. СКО для оценок силы тяги, полученные для $K_1 = -K_2$

Собственно, одна из методических рекомендаций данного исследования заключается в том, что оценки СКО параметров коэффициента силы сопротивления оказываются более устойчивы к шумам.

На основе минимумов оценок СКО параметров коэффициента силы сопротивления были получены оценки постоянных коэффициентов K_1 и K_2 . Рассчитанная с их помощью невязка была исключена из уравнений (4). Затем были оценены параметры a . В численных экспериментах параметрическая идентификация проводилась при помощи метода

наименьших квадратов. Полученные оценки приводятся в таблице II.

Таблица II. Погрешности оценки параметров модели (4) в зависимости от способа нахождения коэффициентов K_1, K_2

| | Погрешность оценки тяги, % | Погрешность оценки c_{x0} , % |
|----------------------------|----------------------------|---------------------------------|
| На основе c_{x0} | 1.27 | 1.67 |
| На основе c_x^α | 0.66 | 1.12 |
| На основе $c_x^{\alpha^2}$ | 0.36 | 0.69 |

Сравнивая таблицы I и II, видно, что учет влияния числа Маха при помощи предлагаемого подхода позволяет заметно снизить погрешности в оценке как тяги, так и постоянного коэффициента силы сопротивления.

V. ЗАКЛЮЧЕНИЕ

В статье представлен подход к решению плохо обусловленной задачи на основе имитации временного сдвига входного сигнала. Его использование проиллюстрировано на примере определения силы тяги и коэффициента силы сопротивления.

Для рассмотренной задачи применение такой регуляризации позволило уменьшить погрешности оценивания силы тяги и постоянного коэффициента силы сопротивления. Если в рассмотренных условиях ошибки изначально составляют 6.6% для тяги и 4.6% для c_{x0} , то оценки, полученные для точек по минимуму СКО параметров модели, дают погрешности порядка 0.5-1.5% и 0.7-1.7% соответственно.

Поскольку предлагаемый метод не определяется физическим смыслом данных, он может применяться для решения других плохо обусловленных задач.

БИБЛИОГРАФИЯ

- [1] M. A. Abidi, A. V. Gribok, J. Paik, *Optimization techniques in computer vision. Ill-posed problems and regularization*. Switzerland: Springer, 2016.
- [2] *Справочник по теории управления*, А. А. Красовский, ред. М.: Наука, 1987.
- [3] Г. В. Добрянский, Т. С. Мартьянов, *Динамика авиационных газотурбинных двигателей*. М: Машиностроение, 1989.
- [4] О. Н. Корсун, Б. К. Поплавский, А. В. Стуловский, М. Х. Ом, «Идентификация тяги двигателя и силы аэродинамического сопротивления по данным летных испытаний со сглаживанием случайных погрешностей измерений,» *Известия РАН. Теория и системы управления*, № 3, с. 69-84, 2024.
- [5] O. N. Korsun, M. H. Om, "Evaluation of the reliability of empirical mathematical models of dynamic systems using input signal shift method,» *Мехатроника, автоматизация, управление*, № 3, с. 111-118, 2025.
- [6] *Аэродинамика, устойчивость и управляемость сверхзвуковых самолетов*, Г. С. Бюшгенс, ред. М.: Наука. Физматлит, 1998.
- [7] R. V. Jategaonkar, *Flight vehicle system identification: a time domain methodology*, Reston: American Institute of Aeronautics and Astronautics, 2006.
- [8] О. Н. Корсун, В. Д. Ляхов, А. В. Стуловский, «Выбор мета параметров в плохо обусловленной задаче идентификации на примере раздельного оценивания тяги летательного аппарата,» *International journal of open information technologies*, № 4, с. 32-36, 2024.

Regularization of ill-conditioned problems based on a more sensitive functional and visual analysis of its local cross-sections

O.N. Korsun, A.V. Stulovskii

Abstract – The article discusses an approach to regularization of ill-conditioned problems using imitation of input signals time shift. One of the sources of such problems is structural difference between models and real objects, which finds expression as interferences in experimental data. While independent errors are readily observable and in many cases could be successfully eliminated, in the case of correlated disturbances even their presence is sometimes difficult to confirm. Proposed transformation changes degree of correlation between the interference and underlying signal, thus making problem tractable by the standard tools of identification methods. Another advantage of this approach consists in the fact, that it obtains multiple realization by varying the duration of the shift, and increasing the amount of data available for processing. For that reason time shift method could be easily applicable without purposeful changes to the experiments themselves or increase in their number, and is suitable to the application of statistical methods. The article proposes the functional based on standard deviation of model parameters, which appears more sensitive to correlated interferences than standard least square functional and improves the quality of parameter estimations. Since detailed analysis of functional level surfaces is time-consuming and labor-intensive, suggested approach consists in utilization of local cross-sections of lesser dimensions. The article demonstrates effectiveness of the imitation of input signal time shift method for the problem of separate identification of thrust and drag coefficients. This regularization allowed us to significantly reduce errors in estimations of model parameters from 4.5 and 6.5% to 0.7-1.7% and 0.5-1.5%, in cases of constant drag coefficient and thrust respectively for data obtained using aircraft flight simulation.

Key words — aircraft flight simulation, identification, ill-conditioned problem, regularization

REFERENCES

- [1] M. A. Abidi, A. V. Gribok, J. Paik, *Optimization techniques in computer vision. Ill-posed problems and regularization*. Switzerland: Springer, 2016.
- [2] Handbook of control theory, A. A. Krasovskiy, ed. Moscow, Nauka, 1987. [in Rus]
- [3] G. V. Dobryansky, T. S. Martiyanov, *Dynamics of aircraft gas turbine engines*. Moscow, Mashinostroenie, 1989. [in Rus]
- [4] O. N. Korsun, B. K. Poplavsky, A. V. Stulovskii, M. H. Om, "Identification of engine thrust and aerodynamic drag force according to flight test data with smoothing of random measurement errors," *Journal of computer and systems sciences international*, no. 3, pp. 432-446, 2024.
- [5] O. N. Korsun, M. H. Om, "Evaluation of the reliability of empirical mathematical models of dynamic systems using input signal shift method," *Mechatronics, automation, control*, no. 3, pp. 111-118, 2025.
- [6] *Aerodynamics, stability and controllability of supersonic aircraft*, G. S. Byushgens, ed. Moscow, Science. Fizmatlit, 1998. [in Rus]
- [7] R. V. Jategaonkar, *Flight vehicle system identification: a time domain methodology*, Reston: American Institute of Aeronautics and Astronautics, 2006.
- [8] O. N. Korsun, V. D. Lyakhov, A. V. Stulovskii, "Selection of meta parameters in an ill-conditioned identification problem using the example of separate estimation of aircraft thrust," *International journal of open information technologies*, vol. 12, no. 4, pp. 32-36, 2024. [in Rus]

About the authors

O. N. Korsun: State Research Institute of Aviation Systems (GosNIIAS), Moscow (e-mail: mamotto@rambler.ru).

A. V. Stulovskii: State Research Institute of Aviation Systems (GosNIIAS), Moscow (e-mail: avstlv@gosniias.ru).