Оценка логарифмической производной функции Кобба-Дугласа по временному ряду со случайными отклонениями

А. В. Захаров, И. С. Курилова, Р. Р. Рамазанова, О. Г. Старцева

***Аннотация*—Рассматривается временной ряд объема производства классической функции Кобба-Дугласа от затрат капитала и труда. Расхождения между теоретическими значениями объема производства (функции Кобба-Дугласа) и реальными показателями трактуются как случайные отклонения. Вместо классической задачи оценки функции Кобба-Дугласа впервые рассматривается задача оценивания ее логарифмической производной. Задача оценки логарифмической производной производственной функции при помощи использования аппарата дифференциальных уравнений сводится к задаче оценки одного из параметров коэффициента сноса в модели «сигнал+шум». Для построения оценок используется метод наименьших квадратов, применяемый к временному ряду реальных значений объема производства. При этом используется линейная зависимость логарифмической производной объема производства от логарифмических производных затрат капитала и труда с соответствующими коэффициентами эластичности и объема производства. Для случая постоянных логарифмических производных затрат капитала и труда получено выражение оценки логарифмической производной объема производства. Для случая переменных логарифмических производных затрат капитала и труда получено равенство для оценки логарифмической производной производственной функции.**

***Ключевые слова*—Функция Кобба-Дугласа, случайные отклонения, линейная регрессия, логарифмическая производная.**

I. Введение

Функция Кобба-Дугласа (производственная функция) имеет вид

$$Q = AK^{\alpha}L^{\beta},$$

где Q – объем производства, A – производственный коэффициент, K – затраты капитала, L – затраты труда, α и β – соответствующие коэффициенты эластичности [4,7].

Функция Кобба-Дугласа используется как для анализа экономического развития предприятия, так и в дополненном виде для анализа развития макроэкономических систем на уровне отрасли, региона и страны [1,6]. Для оценки параметров функции Кобба-Дугласа обычно используют регрессионный анализ [1]. Алгоритм поиска параметров функции Кобба-Дугласа, использующий методологию вариационного исчисления представлен в работе [4].

Рассмотрим непрерывный временной ряд объема производства, а также затрат капитала и труда:

$$Q(t) = AK(t)^{\alpha}L(t)^{\beta}, t > 0. (1)$$

Пусть равенство не выполняется точно. Будем объяснять расхождение теоретических значений $Q(t)$от реальных значений $\bar{Q}(t)$производственной функции наличием случайных отклонений $X(t), t > 0$:

$$\bar{Q}(t) = Q(t) + X(t). (2)$$

Подобная модель называется в теории случайных процессов моделью "сигнал+шум" и подробно исследована в работе [2]. В итоге получаем окончательную формулу для временного ряда производственной функции со случайными отклонениями:

$$\bar{Q}(t) = AK(t)^{\alpha}L(t)^{\beta} + X(t). (3)$$

Для оценки логарифмической производной производственной функции по значениям с отклонениями применим метод наименьших квадратов, исследованный также в [2].

II. Логарифмическая производная объема производства

Логарифмической производной функции y называют производную ее логарифма $(\ln y)' = y'/y$ [5]. Если функцияyможет принимать отрицательные значения, тогда логарифмическуюпроизводную можно доопределить через производную логарифма модуля $(\ln|y|)'$ за исключением значения аргумента, равного нулю [3, с.13].

Пусть $Q(t)$ – значение объема производства в момент времени $t \geq 0$ $(Q(t) > 0)$. Рассмотрим также значение этого показателя через некоторый промежуток времени $\Delta > 0$: $Q(t + \Delta)$. Предположим, что прирост показателя пропорционален значению самого показателя и интервалувремени Δ:

$$Q(t + \Delta) = Q(t)(1 + \lambda_Q(t, \Delta)\Delta), (4)$$

Статья получена 28 ноября 2018 г.

Захаров А.В., Уфимский государственный нефтяной технический университет (e-mail: andrewzakhar@mail.ru).
Курилова И.С., Башкирский государственный педагогический университет им. М. Акмуллы (e-mail: irina.curilowa@mail.ru).
Рамазанова Р.Р., Башкирский государственный педагогический университет им. М. Акмуллы (e-mail: ramazanova.ruzana@mail.ru).
Старцева О.Г., Башкирский государственный педагогический университет им. М. Акмуллы (e-mail: starcevaog@mail.ru).

где $\lambda_Q(t,\Delta)$ - доля прироста показателя со времени $t > 0$ за единицу времени (эффективность использования показателя). Это условие появляется, когда предприятие получает поддержку (например, в виде инвестиций) в зависимости от величины объема производства.

Общая доля прироста показателя за время Δ составит $\lambda_Q(t,\Delta)\Delta$. Преобразуем формулу (4) к виду

$$\lambda_Q(t,\Delta) = \frac{Q(t+\Delta) - Q(t)}{Q(t)\Delta}.$$

Устремив параметрΔ к нулю, в предположении дифференцируемости функции $Q(t)$ получим:

$$\lambda_Q(t) = \lim_{\Delta\to 0}\lambda_Q(t,\Delta) = Q'(t)/Q(t), t \geq 0. (5)$$

Определение. Функцию $\lambda_Q(t)$ назовем логарифмической производной показателя $Q(t)$ в момент времени $t \geq 0$.

Логарифмическая производная показывает относительную скорость изменений функции. В данном случае она может быть интерпретирована как эффективность использования предприятием своего показателя. Если в некоторый момент времени логарифмическая производная положительна, значит показатель растет, если отрицательна – падает. Умножив модуль логарифмической производной на 100%, мы получим текущий процент роста или спада показателя за единицу времени.

Пример 1. Логарифмическая производная объема производства в каждый момент времени равна 0,05. Это означает, что за каждую единицу времени предприятие увеличивает объем производства на 5%. Обыкновенное дифференциальное уравнение, которому удовлетворяет логарифмическая производная показателя, следует непосредственно из определения (5):

$$Q'(t) = \lambda_Q(t)Q(t), t \geq 0. (6)$$

Пример 2. В случае если система использует свои показатели одинаково эффективно (с постоянным коэффициентом эффективности), мы получаем дифференциальное уравнение с постоянным коэффициентом $\lambda > 0$:

$$Q'(t) = \lambda Q(t), t \geq 0,$$

которое имеет экспоненциальное решение:

$$Q(t) = e^{\lambda t} + C, C > 0.$$

Определение. Средней интегральной логарифмической производной за период времени $[\mathrm{t}, \mathrm{t}+\Delta]$ $(\mathrm{t}, \Delta > 0)$ назовем значение

$$\overline{\lambda}_{t,t+\Delta} = \int_t^{t+\Delta} \lambda(t)dt/\Delta.$$

Замечание. Аналогично логарифмические производные и их средние интегральные значения можно рассмотреть для других показателей – затрат капитала и труда.

III. Взаимосвязь логарифмических производных объема производства и затрат капитала и труда

Для оценки логарифмической производной объема производства $Q(t)$ рассмотрим дифференциальное уравнение (6). Вычислим производную производственной функции без случайных отклонений (1):

$$Q'(t) = \\ A\alpha K^{\alpha-1}(t)K'(t)L^{\beta}(t) + A\beta K^{\alpha}(t)L^{\beta-1}(t)L'(t) = \\ = AK^{\alpha}(t)L^{\beta}(t)\left(\alpha\frac{K\prime(t)}{K(t)} + \beta\frac{L\prime(t)}{L(t)}\right) = AQ(t)\left(\alpha\frac{K\prime(t)}{K(t)} + \\ \beta\frac{L\prime(t)}{L(t)}\right), t > 0.$$

Мы приходим к дифференциальному уравнению:

$$Q'(t) = A\left(\alpha\frac{K'(t)}{K(t)} + \beta\frac{L'(t)}{L(t)}\right)Q(t), t > 0.$$

Заметив, что

$$\frac{Q'(t)}{Q(t)} = \big(Ln(Q(t))\big), \frac{K'(t)}{K(t)} = \big(Ln(K(t))\big), \frac{L'(t)}{L(t)} \\ = \big(Ln(L(t))\big),$$

мы получаем дифференциальное уравнение:

$$\big(Ln(Q(t))\big) = A\big[\alpha\big(Ln(K(t))\big) + \beta\big(Ln(L(t))\big)\big], t > 0.$$

Вспомнив определение логарифмической производной мы получаем следующее утверждение.

Теорема 1. Логарифмическая производная объема производства может быть выражена в виде линейной комбинации логарифмических производных затрат капитала и труда:

$$\lambda_Q(t) = A[\alpha\lambda_K(t) + \beta\lambda_L(t)]. (7)$$

Вычислив интегральное среднее интегральное значение выражения (7) теоремы 1 получаем аналогичное утверждение для интегральных средних.

Теорема 2. Средняя интегральная логарифмическая производная за период $[t, t+\Delta]$ $(t, \Delta > 0)$ может быть выражена в виде линейной комбинации

$$\overline{\lambda_Q}_{t,t+\Delta} = A\left[\alpha\overline{\lambda_K}_{t,t+\Delta} + \beta\overline{\lambda_L}_{t,t+\Delta}\right].$$

IV. Оценка по методу наименьших квадратов

Теорема 3. В указанных условиях верно равенство

$$\bar{Q}(t) - \bar{Q}(0) = \int_0^t \bar{Q}(s)\lambda_Q(s)ds + Y(t), (8)$$

где $Y(t) = \int_0^t \big(-X(t)\lambda_Q(t)\big)dt + \int_0^t dX(t)$.

Доказательство. Перепишем равенство (4) в виде

$$Q(t+\Delta) - Q(t) = Q(t)\lambda_Q(t,\Delta)\Delta (9)$$

Заменим теоретическую производственную функцию$Q(t)$на функцию реальных значений со случайными отклонениями $\bar{Q}(t)$ при помощи (2) в левой части (9):

$$(\bar{Q}(t+\Delta) - X(t+\Delta)) - (\bar{Q}(t) - X(t)) = Q(t)\lambda_Q(t,\Delta)\Delta$$

или

$$\bar{Q}(t+\Delta) - \bar{Q}(t) = Q(t)\lambda_Q(t,\Delta)\Delta + (X(t+\Delta) - X(t)).$$

Устремив $\Delta \to 0$, перейдем к дифференциалам:

$$d\bar{Q}(t) = Q(t)\lambda_Q(t)dt + dX(t). (10)$$

Теперь заменим теоретическую производственную функцию $Q(t)$на функцию реальных значений со случайными отклонениями $\bar{Q}(t)$ при помощи (2) в правой части (10):

$$d\bar{Q}(t) = (\bar{Q}(t) - X(t))\lambda_Q(t)dt + dX(t)$$

или

$$d\bar{Q}(t) = \bar{Q}(t)\lambda_Q(t)dt - X(t)\lambda_Q(t)dt + dX(t). (11)$$

Проинтегрируем выражение (11) по произвольному отрезку $[0, t]$, $t \geq 0$:

$$\bar{Q}(t) - \bar{Q}(0) =$$

$$= \int_0^t \bar{Q}(s)\lambda_Q(s)ds + \left[\int_0^t \left(-X(t)\lambda_Q(t)\right)dt + \int_0^t dX(t)\right]. (12)$$

Обозначив выражение в квадратных скобках в (12) через $Y(t)$, получаем окончательно выражение (8) теоремы. Теорема доказана.

Для того, чтобы оценить $\lambda_Q(t)$ по значениям $Q(t)$, $t \in [0,T]$, воспользуемся теоремой 2 и, считая функцию $Y(t)$, $t > 0$, случайными отклонениями, применим метод наименьших квадратов (см., например, [2]):

$$F(\lambda_Q()) = \int_0^T \left(\bar{Q}(t) - \bar{Q}(0) - \int_0^t \bar{Q}(s)\lambda_Q(s)ds\right)^2 dt \to \min_{\lambda_Q(.)}. (13)$$

V. Some Common Mistakes

Предположим, что логарифмические производные $\lambda_K(s)$ и $\lambda_L(s)$ постоянны. Согласно теореме 1, в этом случае постоянной является и логарифмическая производная производственной функции $\lambda_Q = \lambda_Q(s)$, $s > 0$. Условие (13) мы можем записать в виде

$$F(\lambda_Q) = \int_0^T \left(\bar{Q}(t) - \bar{Q}(0) - \lambda_Q \int_0^t \bar{Q}(s)ds\right)^2 dt \to \min_{\lambda_Q}. (14)$$

Для того чтобы получить условие минимума по λ_Q, вычислим производную функции $F(\lambda_Q)$ в (14) и приравняем ее к нулю:

$$F'(\lambda_Q) = -2\int_0^T \left[(\bar{Q}(t) - \bar{Q}(0))\int_0^t \bar{Q}(s)ds\right]dt + 2\lambda_Q \int_0^T \left(\int_0^t \bar{Q}(s)ds\right)^2 dt.$$

В итоге мы получаем критическую точку:

$$\lambda_Q = \frac{\int_0^T \left[(\bar{Q}(t) - \bar{Q}(0))\int_0^t \bar{Q}(s)ds\right]dt}{\int_0^T \left(\int_0^t \bar{Q}(s)ds\right)^2 dt}. (15)$$

Поскольку вторая производная функции $F(\lambda_Q)$всюду положительна, полученное значение (15) и есть точка минимума, т.е. является оценкой логарифмической производной по методу наименьших квадратов.

Теорема 4. В указанных условиях минимум функции (14) достигается в точке (15).

Пример 3. Пусть $Q(t) = e^{\lambda t}$, $Q(0) = 1$. В этом случае из формулы (15) получаем оценку по методу наименьших квадратов $\lambda_Q = \lambda$, что согласуется с Примером 2.

VI. Случай переменных логарифмических производных

В общем случае, для того чтобы найти функцию $\lambda_Q()$доставляющую минимум функционалу (13), прибавим к ней дважды интегрируемую функцию $\delta()$:

$$F(Q() + \delta()) = \int_0^T \left(\bar{Q}(t) - \bar{Q}(0) - \int_0^t (Q(s) + \delta())\lambda_Q(s)ds\right)^2 dt =$$

$$= \int_0^T \left(\bar{Q}(t) - \bar{Q}(0) - \int_0^t Q(s)\lambda_Q(s)ds - \int_0^t \delta()\lambda_Q(s)ds\right)^2 dt =$$

$$= \int_0^T \left(\bar{Q}(t) - \bar{Q}(0) - \int_0^t Q(s)\lambda_Q(s)ds\right)^2 dt - -2\int_0^T \left(\bar{Q}(t) - \bar{Q}(0) - \int_0^t Q(s)\lambda_Q(s)ds\right)\left(\int_0^t \delta()\lambda_Q(s)ds\right)dt + + \int_0^T \left(\int_0^t \delta()\lambda_Q(s)ds\right)^2 dt$$

Нетрудно заметить, что приращение функционала равно:

$$F(Q() + \delta()) - F(Q()) = -2\int_0^T \left(\bar{Q}(t) - \bar{Q}(0) - \int_0^t Q(s)\lambda_Q(s)ds\right) \cdot \cdot \left(\int_0^t \delta()\lambda_Q(s)ds\right)dt + \int_0^T \left(\int_0^t \delta()\lambda_Q(s)ds\right)^2 dt =$$

$$= \int_0^T \left(-2(\bar{Q}(t) - \bar{Q}(0)) + \int_0^t (2Q(s) + \delta(s))\lambda_Q(s)ds\right) \cdot \cdot \left(\int_0^t \delta()\lambda_Q(s)ds\right)dt.$$

Необходимое условие минимума функционала – смена знака при прохождении критической функции. Поэтому функционал будет достигать минимума при

$$-2(\bar{Q}(t) - \bar{Q}(0)) + \int_0^t (2Q(s) + \delta(s))\lambda_Q(s)ds = 0.$$

Перепишем равенство в виде:

$$-2(\bar{Q}(t) - \bar{Q}(0)) + \int_0^t 2Q(s)\lambda_Q(s)ds + \int_0^t \delta(s)\lambda_Q(s)ds = 0$$

Вспоминая дифференциальное уравнение для логарифмической производной (6), приходим к равенству

$$-2(\bar{Q}(t) - \bar{Q}(0)) + 2(Q(t) - Q(0)) + \int_0^t \delta(s)\lambda_Q(s)ds = 0$$

Отсюда следует, что необходимое условие минимума выглядит следующим образом:

$$\int_0^t \delta(s)\lambda_Q(s)ds = 2(\bar{Q}(t) - \bar{Q}(0)) - 2(Q(t) - Q(0)). (16)$$

Теорема 5. В указанных условиях минимум функционала (13) достигается при выполнении равенства (16).

VII. Заключение

Рассмотрена задача оценивания логарифмической производной производственной функция Кобба-Дугласа со случайными отклонениями. С использованием метод наименьших квадратов для модели «сигнал+шум» получены оценки для случая постоянных и переменных логарифмических производных затрат капитала и труда.

Библиография

[1] Горидько Н.П., Нижегородцев Р.М. Современный экономический рост: теория и регрессионный анализ. – Новочеркасск: Наука-Образование-Культура, 2011. – 343 с.

[2] Дороговцев А.Я. Теория оценок параметров случайных процессов. - Киев: Вища школа, Изд-во при Киев.ун-те, 1982. – 192 с.

[3] Мустафина Д.А., Ребро И.В., Кузьмин С.Ю., Короткова Н.Н. Дифференцирование функции одной и нескольких переменных с приложениями: учебное пособие. – Волгоград: ВПИ (филиал) ВолгГТУ, 2009. – 118 с.

[4] Мясникова Н.П. Определение параметров функции Кобба-Дугласа // Вестник Саратовского государственного социально-экономического университета. – 2005. – №11 1. – С. 193-195.

[5] Пешкичев Ю.А. Матричный аналог логарифмической производной // Образование и наука: проблемы и перспективы развития. Всероссийская научно-практическая конференция с международным участием. – Махачкала: Автономная некоммерческая образовательная организация "Махачкалинский центр повышения квалификации". – 2005. – С. 208-211.

[6] Юсим В.Н., Прокопьев А.А. (2014). Производственная функция Кобба-Дугласа: миф и реальность // Научные исследования и разработки. Экономика фирмы. - Т.3. –№4 . – С. 54-60.

[7] Cobb C.W., Douglas P.H. A Theory of Production // Amer. Econ. Rev. Suppl. – 1928. – Vol. 18. March. – pp. 139–165.

Estimation of logarithmic derivative of Cobb-Douglas production function by time series with accidental errors

A. V. Zakharov, I. S. Kurilova, R. R. Ramazanova, O. G. Starceva

***Abstract*—The production time series for the classical Cobb-Douglas function on capital and labor costs is considered. Discrepancies between theoretical values of output (Cobb-Douglas function) and real indicator values are interpreted as random deviations. Instead of the classical problem of Cobb-Douglas function estimation, the problem of its logarithmic derivative estimation is considered for the first time. The estimating problem for a production function logarithmic derivative with use of differential equations technique is reduced to the problem of estimating one of the parameters of the drift coefficient in the signal-to-noise model. To construct estimates, the least squares method applied to the time series of production real values is used. It uses the linear dependence of the logarithmic derivative of the volume of production on the logarithmic derived costs of capital and labor with the corresponding coefficients of elasticity and volumes of production. For the case of constant logarithmic derivative costs of capital and labor the estimate expression for the production volume logarithmic derivative is obtained. For the case of variable logarithmic derivatives of capital and labor expenditures, we obtained the equality for estimating the logarithmic derivative of the production function.**

***Keywords*— Cobb-Douglas function, random deviations, linear regression, logarithmic derivative.**

REFERENCES

[1] Gorid'ko N.P., Nizhegorodcev R.M. Sovremennyj jekonomicheskij rost: teorija i regressionnyj analiz. – Novocherkassk: Nauka-Obrazovanie-Kul'tura, 2011. – 343 s.
[2] Dorogovcev A.Ja. Teorija ocenok parametrov sluchajnyh processov. - Kiev: Vishha shkola, Izd-vo pri Kiev.un-te, 1982. – 192 s.
[3] Mustafina D.A., Rebro I.V., Kuz'min S.Ju., Korotkova N.N. Differencirovanie funkcii odnoj i neskol'kih peremennyh s prilozhenijami: uchebnoe posobie. – Volgograd: VPI (filial) VolgGTU, 2009. – 118 s.
[4] Mjasnikova N.P. Opredelenie parametrov funkcii Kobba-Duglasa // Vestnik Saratovskogo gosudarstvennogo social'no-jekonomicheskogo universiteta. – 2005. – #11 1. – S. 193-195.
[5] Peshkichev Ju.A. Matrichnyj analog logarifmicheskoj proizvodnoj // Obrazovanie i nauka: problemy i perspektivy razvitija. Vserossijskaja nauchno-prakticheskaja konferencija s mezhdunarodnym uchastiem. – Mahachkala: Avtonomnaja nekommercheskaja obrazovatel'naja organizacija "Mahachkalinskij centr povyshenija kvalifikacii". – 2005. – S. 208-211.
[6] Jusim V.N., Prokop'ev A.A. (2014). Proizvodstvennaja funkcija Kobba-Duglasa: mif i real'nost' // Nauchnye issledovanija i razrabotki. Jekonomika firmy. - T.3. –#4 . – S. 54-60.
[7] Cobb C.W., Douglas P.H. A Theory of Production // Amer. Econ. Rev. Suppl. – 1928. – Vol. 18. March. – pp. 139–165.