О задаче, возникающей при решении уравнений с вырождениями

Д.С. Кац

Аннотация — **Рассматривается проблема, возникающая при исследовании уравнений с вырождающимися коэффициентами — необходимость вычисления k-преобразований Лапласа-Бореля функций вида $\exp(\alpha/r^n)$. Показывается что такие задачи сводятся к решению уравнений с младшими вырождениями типа клюва в символе. Показывается, что они являются уравнениями, преобразованием Лапласа-Бореля сводящимися к уравнениям с коническим вырождением в символе. Строятся асимптотики решений таких уравнений и образов исследуемых функций.**

Ключевые слова — **асимптотика, вырождение, дифференциальные уравнения, ресургентный анализ, преобразование Лапласа, преобразование Бореля.**

I. Введение

Рассматривается задача вычисления образов k-преобразования Лапласа-Бореля функций вида $\exp(\alpha/r^n)$, где $\alpha \in \mathbb{C}$, k, $n \in \mathbb{N}$, $1 \leq n < k$. Необходимость вычисления образов таких функций возникает, например, при построении асимптотик решений вырождающихся неоднородных дифференциальных уравнений вида

$$\sum_{i=0}^{m} a_m(r)\frac{\mathrm{d}^i}{\mathrm{d}r^i}u(r) = f(r),$$

где в левой части находится дифференциальный оператор с голоморфными коэффициентами, а правая часть является ресургентной функцией (определение ресургентности дано ниже). В работе [1] показано, что такие уравнения с вырождениями в коэффициентах эквивалентны уравнениям с вырождениями в символе

$$\sum_{i=0}^{m} \tilde{a}_i(r)\left(-\frac{1}{k}r^{k+1}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}r}\right)^i u(r) = g(r),$$

где функции $\tilde{a}_m(r)$ — голоморфные, и $\tilde{a}_n(0) \neq 0$. В работах [2] и [3] асимптотические разложения решений таких уравнений были вычислены в случае, когда корни основного символа оператора, стоящего в левой части уравнения, т.е. многочлена

$$H_0(p) = \sum_{i=0}^{m} \tilde{a}_i(0)\mathrm{p}^i,$$

являются простыми, а правая часть может обладать особенностями вида

$$\exp\left(\frac{\lambda_j}{r^k} + \sum_{i=1}^{k-1}\frac{\alpha_i^j}{r^i}\right)r^{\sigma_j}\sum_{i=0}^{\infty} s_i^j r^i,$$

такими, что числа λ_j не совпадают с корнями $H_0(p)$. В работе [4] рассмотрен т.н. случай резонанса, т.е. совпадения чисел λ_j с корнями основного символа, для уравнений с младшими $(k = 1)$ вырождениями. Отметим, что с точностью до замены $z = 1/r$ таким видом обладают уравнения с коэффициентами, голоморфными в некоторой окрестности бесконечности, задача построения асимптотических разложений решений которых рассматривалась, например, в книге [5], где были разобраны уравнения второго порядка с единичным старшим коэффициентом.

Необходимость вычисления k-преобразований Лапласа-Бореля рассматриваемых в работе функций является одной из проблем, возникающих при исследовании неоднородных уравнений со старшими вырождениями. Дело в том, что при решении таких уравнений возникает потребность в заменах вида $u(r) = \exp\left(\sum_{i=1}^{k-1}\alpha_i/r^i\right)r^\sigma v(r)$, но, после коммутации умножения на $\exp\left(\sum_{i=1}^{k-1}\alpha_i/r^i\right)r^\sigma$ с дифференцированием и домножения уравнения на $\exp\left(-\sum_{i=1}^{k-1}\alpha_i/r^i\right)r^{-\sigma}$, рассматриваемые в статье функции начинают фигурировать в правой части и требуется вычислять их k-преобразования Лапласа-Бореля. Аналогичная проблема возникает при исследовании уравнений, имеющих кратные корни основного символа, методом повторного квантования, описанного в работе [6], т.к. уравнение, получаемое после первого применения преобразования Лапласа-Бореля к исходному всегда будет неоднородным.

В данной работе для вычисления k-преобразований Лапласа-Бореля функций вида $\exp(\alpha/r^n)$, исследуются системы уравнений для образов функций $r^m e^{\alpha/r^n}$, $m = \overline{0, k-1}$, возникающие в следствие известных свойств k-преобразования Лапласа-Бореля. Показано, что задача вычисления искомых образов сводится к решению уравнений с младшими вырождениями вида

$$\sum_{i=1}^{j} c_i t^{j-i}\left(-t^2\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\right)^i w(t) + \sum_{i=1}^{s} c_{i'}t^{s-i}\left(-t^2\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\right)^i w(t) + {} + a_0 t^j = t^{j-1/\gamma}\tilde{h}(t^{1/\gamma}),$$

где γ, s, j, c_i и $c_{i'}$ — константы, зависящие от k, n и α. В случаях $s = 0$ и $s = 1$ получаются уравнения, исследованные соответственно в работах [3] и [4]. При $s \geq 2$ данные уравнения имеют кратный корень в основном символе, однако, они являются уравнениями вида

Статья получена 14 февраля 2017.

Д.С. Кац, аспирант., МГУ им. М.В. Ломоносова (e-mail: dmitryxk@gmail.com)

$$\sum_{i=n+1}^{n+M} h_i(r^k)\left(-\frac{1}{k}r^{k+1}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}r}\right)^i u(r) +$$
$$+\sum_{i=1}^{n} r^{(n-i)k} h_i(r^k)\left(-\frac{1}{k}r^{k+1}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}r}\right)^i u(r) = g(r),$$

где $h_i(r^k)$ — полиномы, причем $h_n(0) \neq 0$, $h_{n+M}(0) \neq 0$, а $g(r)$ — k-ресургентная функция, которая имеет асимптотическое разложение вида

$$\sum_j r^{\sigma_j} \sum_{l=0}^{m_j} \ln^l r \sum_{i=0}^{\infty} A_{ij}^l r^i, \qquad \sigma_j \in \mathbb{R}.$$

Такие уравнения также являются предметом исследования в данной работе, в частности, строятся асимптотичесческие разложения их решений, что позволяет найти вид k-преобразования Лапласа-Бореля функций вида $\exp(\alpha/r^n)$ в общем случае.

II. Основные определения

Здесь будут даны определения некоторых понятий ресургентного анализа, которые понадобятся нам в дальнейшем.

Обозначим через $S_{R,\varepsilon}$ сектор $S_{R,\varepsilon} = \{-\varepsilon < \arg r < \varepsilon, |r| < R\}$. Будем говорить, что аналитическая на $S_{R,\varepsilon}$ функция f имеет не более, чем k-экспоненциальный рост в нуле, если существуют такие неотрицательные константы C и α, что в секторе $S_{R,\varepsilon}$ выполнено неравенство

$$|f| < Ce^{\alpha/|r|^k}$$

Обозначим через $E(\widetilde{\Omega}_{R,\varepsilon})$ пространство функций экспоненциального роста на бесконечности, голоморфных в области $\widetilde{\Omega}_{R,\varepsilon} = \{r\colon |\arg r| < \pi/2 + \varepsilon, |r| > R\}$, а через $E(\mathbb{C})$ — пространство целых функций экспоненциального роста на бесконечности. Через $E_k(S_{R,\varepsilon})$ обозначим пространство функций, голоморфных в $S_{R,\varepsilon}$, k-экспоненциально растущих в нуле.

k-преобразованием Лапласа-Бореля функции $f(r) \in E_k(S_{R,\varepsilon})$ называется

$$B_k f = \int_0^{r_0} e^{-p/r^k} f(r) \frac{\mathrm{d}r}{r^{k+1}}.$$

Известно, что $B_k\colon E_k(S_{R,\varepsilon}) \to E(\widetilde{\Omega}_{R,\varepsilon})/E(\mathbb{C})$. Обратное преобразование Лапласа-Бореля определяется следующим образом:

$$B_k^{-1}\tilde{f} = \frac{k}{2\pi i}\int_{\tilde{\gamma}} e^{p/r^k}\tilde{f}(p)\mathrm{d}p,$$

где контур $\tilde{\gamma}$ — граница области $\widetilde{\Omega}_{R,\varepsilon}$ (его изображение можно найти, например, на рис. 2 работы [2]). Отметим, что верна формула

$$B_k \circ \left(-\frac{1}{k}r^{k+1}\frac{d}{dr}\right) f(r) = pB_k f.$$

Определение 1. Функция $\tilde{f}$ называется бесконечно-продолжимой, если для любого числа R существует такое дискретное множество точек $Z_R \subset \mathbb{C}$, что функция $\tilde{f}$ аналитически продолжима из первоначальной области определения вдоль любого пути длины меньшей, чем R, не проходящего через Z_R.

Определение 2. Элемент f пространства $E_k(S_{R,\varepsilon})$ называется k-ресургентной функцией, если его k-преобразование Лапласа-Бореля бесконечно продолжимо.

Основы теории преобразований Лапласа-Бореля и ресургентного анализа можно найти в книге [7].

III. Построение системы уравнений

Рассмотрим задачу вычисления $B_k e^{\alpha/r^n}$, где $k, n \in \mathbb{N}$, $1 \leq 1 < k$. Обозначим

$$\tilde{I}_m(p) = B_k r^m e^{\alpha/r^n}, \qquad m = \overline{0, k-1}.$$

$\tilde{I}_m$, здесь, — элементы пространства $\mathrm{E}(\widetilde{\Omega}_{R,\varepsilon})/E(\mathbb{C})$. Нашей задачей является вычисление $\tilde{I}_0$.

Для начала, отметим следующее соотношение, вытекающее из свойств k-преобразования Лапласа-Бореля:

$$p\tilde{I}_0(p) = B_k\left(-\frac{1}{k}r^{k+1}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}r}e^{\alpha/r^n}\right) = B_k\left(\frac{n\alpha}{k}r^{k-n}e^{\alpha/r^n}\right) =$$
$$= \frac{n\alpha}{k}\tilde{I}_{k-n}(p).$$

Получили уравнение, связывающее $\tilde{I}_0$ и $\tilde{I}_{k-n}$. Аналогично, для $m = \overline{1, k-1}$ имеем

$$p\tilde{I}_m(p) = B_k\left(-\frac{1}{k}r^{k+1}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}r}r^m e^{\alpha/r^n}\right) =$$
$$= \frac{n\alpha}{k}B_k\left(r^{k+m-n}e^{\alpha/r^n}\right) - \frac{m}{k}B_k\left(r^{k+m}e^{\alpha/r^n}\right). \qquad (1)$$

В работе [8] доказано следующее соотношение:

$$B_k r^k B_k^{-1}\tilde{f}(p) = -\frac{1}{k}\int_\infty^p \tilde{f}(p')\mathrm{d}p'.$$

С его помощью второе слагаемое в правой части равенства (1) можно представить следующим образом:

$$-\frac{m}{k}B_k\left(r^{k+m}e^{\alpha/r^n}\right) = \frac{m}{k^2}\int_\infty^p \tilde{I}_m(p')\mathrm{d}p'.$$

Первое же слагаемое при $m < n$ имеет вид

$$\frac{n\alpha}{k}B_k\left(r^{k+m-n}e^{\alpha/r^n}\right) = \frac{n\alpha}{k}\tilde{I}_{k+m-n}(p),$$

а при $m \geq n$

$$\frac{n\alpha}{k}B_k\left(r^{k+m-n}e^{\alpha/r^n}\right) = -\frac{n\alpha}{k^2}\int_\infty^p \tilde{I}_{m-n}(p')\mathrm{d}p'.$$

С учетом всего вышесказанного можно выписать следующую систему уравнений:

$$\begin{cases} p\tilde{I}_0(p) = \dfrac{n\alpha}{k}\tilde{I}_{k-n}(p), \\ p\tilde{I}_1(p) = \dfrac{n\alpha}{k}\tilde{I}_{k+1-n}(p) + \dfrac{1}{k^2}\displaystyle\int_\infty^p \tilde{I}_1(p')\mathrm{d}p', \\ \ldots \\ p\tilde{I}_{n-1}(p) = \dfrac{n\alpha}{k}\tilde{I}_{k-1}(p) + \dfrac{n-1}{k^2}\displaystyle\int_\infty^p \tilde{I}_{n-1}(p')\mathrm{d}p', \\ p\tilde{I}_n(p) = -\dfrac{n\alpha}{k^2}\displaystyle\int_\infty^p \tilde{I}_0(p')\mathrm{d}p' + \dfrac{n}{k^2}\displaystyle\int_\infty^p \tilde{I}_n(p')\mathrm{d}p', \\ \ldots \\ p\tilde{I}_{k-1}(p) = -\dfrac{n\alpha}{k^2}\displaystyle\int_\infty^p \tilde{I}_{k-1-n}(p')\mathrm{d}p' + \\ +\dfrac{k-1}{k^2}\displaystyle\int_\infty^p \tilde{I}_{\mathrm{k}-1}(p')\mathrm{d}p'. \end{cases} \qquad (2)$$

Интересующую нас величину мы обозначили как $\tilde{I}_0$. Таким образом из всех неизвестных системы нас интересует только эта.

Данную систему рассмотрим сначала для модельного случая $k = 6$, $n = 4$, а затем опишем, что будет происходить в случае общем.

IV. Модельный пример

Чтобы вычислить $B_6 e^{\alpha/r^4}$ достаточно найти $\tilde{I}_0$ в следующей системе уравнений:

$$\begin{cases} p\tilde{I}_0(p) = \frac{2\alpha}{3}\tilde{I}_2(p), \\ p\tilde{I}_1(p) = \frac{2\alpha}{3}\tilde{I}_3(p) + \frac{1}{36}\int_\infty^p \tilde{I}_1(p')\mathrm{d}p', \\ p\tilde{I}_2(p) = \frac{2\alpha}{3}\tilde{I}_4(p) + \frac{1}{18}\int_\infty^p \tilde{I}_2(p')\mathrm{d}p', \\ p\tilde{I}_3(p) = \frac{2\alpha}{3}\tilde{I}_5(p) + \frac{1}{12}\int_\infty^p \tilde{I}_3(p')\mathrm{d}p', \\ p\tilde{I}_4(p) = -\frac{1\alpha}{9}\int_\infty^p \tilde{I}_0(p')\mathrm{d}p' + \frac{1}{9}\int_\infty^p \tilde{I}_4(p')\mathrm{d}p', \\ p\tilde{I}_5(p) = -\frac{1\alpha}{9}\int_\infty^p \tilde{I}_1(p')\mathrm{d}p' + \frac{5}{36}\int_\infty^p \tilde{I}_5(p')\mathrm{d}p'. \end{cases} \quad (3)$$

Так как $\tilde{I}_m$ — это элементы пространства $E(\widetilde{\Omega}_{R,\varepsilon})/E(\mathbb{C})$, т.е. классы функций, то работу с системой (3) начнем с того, что зафиксируем в каждом из классов $\tilde{I}_m(p)$ по элементу $I_m(p)$. При этом равенства из системы (3) при переходе от классов $\tilde{I}_m(p)$ к их фиксированным членам $I_\mathrm{m}(p)$ *сохранятся с точностью до голоморфных функций*, т.е. будет иметь место система

$$\begin{cases} \tilde{f}_0(p) + pI_0(p) = \frac{2\alpha}{3}I_2(p), \\ \tilde{f}_1(p) + pI_1(p) = \frac{2\alpha}{3}I_3(p) + \frac{1}{36}\int_\infty^p I_1(p')\mathrm{d}p', \\ \tilde{f}_2(p) + pI_2(p) = \frac{2\alpha}{3}I_4(p) + \frac{1}{18}\int_\infty^p I_2(p')\mathrm{d}p', \\ \tilde{f}_3(p) + pI_3(\mathrm{p}) = \frac{2\alpha}{3}I_5(p) + \frac{1}{12}\int_\infty^p I_3(p')\mathrm{d}p', \\ \tilde{f}_4(p) + pI_4(p) = -\frac{\alpha}{9}\int_\infty^p I_0(p')\mathrm{d}p' + \frac{1}{9}\int_\infty^p I_4(p')\mathrm{d}p', \\ \tilde{f}_5(p) + pI_5(p) = -\frac{\alpha}{9}\int_\infty^p I_1(p')\mathrm{d}p' + \frac{5}{36}\int_\infty^p I_5(p')\mathrm{d}p', \end{cases}$$

где $\tilde{f}_m(p)$ — некоторые голоморфные функции. В последней системе каждое уравнение (кроме первого) продифференцируем, а затем разрешим относительно неизвестной функции (или ее производной), входящей в первое слагаемое правой части. Получим

$$\begin{cases} I_2(p) = \frac{3}{2\alpha}pI_0(p) - \frac{3}{2\alpha}\tilde{f}_0(p), & (4) \\ I_3'(p) = \frac{35}{24\alpha}I_1(p) + \frac{3}{2\alpha}pI_1'(p) - \frac{3}{2\alpha}\tilde{f}_1'(p), & (5) \\ I_4'(p) = \frac{17}{12\alpha}I_2(p) + \frac{3}{2\alpha}pI_2'(p) - \frac{3}{2\alpha}\tilde{f}_2'(p), & (6) \\ I_5'(p) = \frac{11}{8\alpha}I_3(p) + \frac{3}{2\alpha}pI_3'(p) - \frac{3}{2\alpha}\tilde{f}_3'(p), & (7) \\ I_0(p) = -\frac{8}{\alpha}I_4(p) - \frac{9}{\alpha}pI_4'(p) - \frac{9}{\alpha}\tilde{f}_4'(p), & (8) \\ I_1(p) = -\frac{31}{4\alpha}I_5(p) - \frac{9}{\alpha}\mathrm{p}I_5'(p) - \frac{9}{\alpha}\tilde{f}_5'(p). & (9) \end{cases}$$

Получить уравнение, содержащее из всех неизвестных только интересующее нас ($I_0(p)$), можно следующим образом: дифференцируем уравнение (8):

$$I_0'(p) = -\frac{17}{\alpha}I_4'(p) - \frac{9}{\alpha}pI_4''(p) - \frac{9}{\alpha}\tilde{f}_4''(p).$$

В полученном уравнении выражаем $I_4'(p)$ через $I_2(p)$ с помощью уравнения (6):

$$I_0'(p) = -\frac{17^2}{12\alpha^2}I_2(p) - \frac{207}{4\alpha^2}pI_2'(p) - \frac{27}{2\alpha^2}p^2I_2''(p) - \\ - \tilde{h}_2(p),$$

где $\tilde{h}_2(p) = -\frac{39}{2\alpha^2}\tilde{f}_2'(p) - \frac{27}{2\alpha^2}\tilde{f}_2''(p) + \frac{9}{\alpha}\tilde{f}_4''(p)$ — голоморфная функция. Наконец, выражаем $I_2(p)$ через $I_0(p)$ с помощью уравнения (4):

$$-\frac{81}{4\alpha^3}p^3I_0''(p) + \left(-\frac{945}{8\alpha^3}p^2 - 1\right)I_0'(p) - \\ - \frac{455}{4\alpha^3}pI_0(p) = \tilde{h}_0(p), \quad (10)$$

где $\tilde{h}_0(p)$ — некоторая голоморфная функция, выражающаяся через $\tilde{f}_0(p)$, $\tilde{f}_2(p)$, $\tilde{f}_4(p)$ и α. Получили линейное дифференциальное уравнение с голоморфныммн коэффициентами относительно $I_0(p)$. Отметим, что уравнения (5), (7) и (9) при этом остались незадействованными. В работе [1] было показано, что уравнения с голоморфными коэффициентами представимы в виде уравнений с вырождениями типа клюва в символе, в частности, уравнение (10) можно переписать в виде

$$-\frac{81}{\alpha^3}\left(-\frac{1}{2}p^3\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}p}\right)^2 I_0(p) + \\ + \left(\frac{459}{4\alpha^3}p^2 + 2\right)\left(-\frac{1}{2}p^3\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}p}\right)I_0(p) - \\ - \frac{455}{4\alpha^3}p^4I_0(p) = p^3\tilde{h}_0(p).$$

Данное уравнение можно свести к уравнению с младшими вырождениями заменой $p^2 = t$, $I_0(p) = w(t)$:

$$-\frac{81}{\alpha^3}\left(-t^2\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\right)^2 w(t) + \left(\frac{459}{4\alpha^3}t + 2\right)\left(-t^2\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\right)w(t) - \\ - \frac{455}{4\alpha^3}t^2w(t) = t^{3/2}\tilde{h}_0(t^{1/2}).$$

Это — уравнение с основным символом

$$-\frac{81}{\alpha^3}q^2 + 2q,$$

не имеющим кратных корней, и слабым резонансом в нуле, подобное уравнениям, рассматривавшимся в работе [4]. Построив асимптотику его решения и вернувшись к исходным переменным получим

$$B_6\exp\left(\frac{\alpha}{r^4}\right) = \sum_{i=3}^\infty C_ip^i + \\ + \exp\left(\frac{2\alpha^3}{81p^2}\right)p^{-51/18}C\left(1 + \\ + \sum_{i=1}^\infty p^{2i}\prod_{s=1}^i(36s^2 - 783s + 1820)\right),$$

где C_i, C — некоторые постоянные.

V. Общий случай

В общем случае задача вычисления $B_k e^{\alpha/r^n}$ сводится к поиску неизвестного $\tilde{I}_0$ в системе (2). Аналогично модельному примеру, зафиксируем в каждом из классов $\tilde{I}_m(p)$ по элементу $I_m(p)$, а каждое уравнение полученной системы (кроме первого) продифференцируем. Получим систему

$$\begin{cases} I_{k-n}(p) = \frac{k}{n\alpha} p I_0(p) - \frac{k}{n\alpha} \tilde{f}_0(p), \\ I'_{k+1-n}(p) = \frac{k^2-1}{kn\alpha} I_1(p) + \frac{k}{n\alpha} p I'_1(p) - \\ -\frac{k}{n\alpha} \tilde{f}'_1(p), \\ \ldots \\ I'_{k-1}(p) = \frac{k^2-n+1}{kn\alpha} I_{n-1}(p) + \frac{k}{n\alpha} p I'_{n-1} - \\ -\frac{k}{n\alpha} \tilde{f}'_{n-1}(p), \\ I_0(p) = -\frac{k^2-n}{n\alpha} I_n(p) - \frac{\mathrm{k}^2}{n\alpha} p I'_n(p) - \\ -\frac{k^2}{n\alpha} \tilde{f}'_n(p), \\ I_1(p) = -\frac{k^2-n-1}{n\alpha} I_{n+1}(p) - \frac{k^2}{n\alpha} p I'_{n+1} - \\ -\frac{k^2}{n\alpha} \tilde{f}'_{n+1}(p), \\ \ldots \\ I_{k-n-1}(p) = -\frac{k^2-k+1}{n\alpha} I_{k-1}(p) - \\ -\frac{k^2}{n\alpha} p I'_{k-1}(p) - \frac{k^2}{n\alpha} \tilde{f}'_{k-1}(p). \end{cases} \tag{11}$$

Процесс получения из системы (11) единственного уравнения, содержащего только одну неизвестную функцию — $I_0(p)$ — аналогичен такому же процессу для модельного примера: имеет место

Теорема 1. Один из представителей $I_0(p)$ класса функций $\tilde{I}_0(p)$, являющегося k-преобразованием Лапласа-Бореля функции $\exp(\alpha/r^n)$, удовлетворяет уравнению

$$\sum_{i=s+1}^{j} c_i p^{\gamma(j-i)} \left(-\frac{1}{\gamma} p^{\gamma+1} \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}p}\right)^i I_0(p) + \\ + \sum_{i=1}^{s} \left(c_i p^{\gamma(j-i)} + c'_i p^{\gamma(s-i)}\right) \times \\ \times \left(-\frac{1}{\gamma} p^{\gamma+1} \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}p}\right)^i I_0(p) + \\ + a_0 p^{\gamma j} I_0(p) = p^{\gamma j-1} \tilde{h}(p), \tag{12}$$

где

$$j = \frac{k}{\text{НОД}(n,k)} - 1, s = \frac{n}{\text{НОД}(n,k)} - 1, \\ \gamma + 1 = \frac{k}{k-n} \tag{13}$$

c_i и c'_i — некоторые числовые коэффициенты, $\tilde{h}(p)$ — некоторая голоморфная функция.

Доказательство. Сначала докажем, что $I_0(p)$ удовлетворяет уравнению вида

$$I_0^{(s)}(p) = \tilde{h}(p) + \sum_{i=0}^{j} a_i p^{i+1} I_0^{(i)}(p), \tag{14}$$

где $\tilde{h}(p)$ — некоторая голоморфная функция, а a_i — числовые коэффициенты. Для этого дифферецируюя соответствующее число раз различные уравнения системы (11) получим следующие соотношения:

$$I_{k-n}^{(s)}(p) = \frac{sk}{n\alpha} I_0^{(s-1)}(p) + \frac{k}{n\alpha} p I_0^{(s)}(p) - \\ - \frac{k}{n\alpha} \tilde{f}_0^{(s)}(p), \qquad \text{при } s \geq 0; \tag{15}$$

$$I_m^{(s)}(p) = -\frac{(s+1)k^2 - (n+m)}{n\alpha} I_{m+n}^{(s)}(p) - \\ - \frac{k^2}{n\alpha} p I_{m+n}^{(s+1)}(p) - \frac{k^2}{n\alpha} \tilde{f}_{m+n}^{(s)}(p), \\ \text{при } m = \overline{0, k-n-1}, s \geq 0 \tag{16}$$

$$I_m^{(s)}(p) = \frac{sk^2 + k - n - m}{kn\alpha} I_{m-k+n}^{(s-1)}(p) + \\ + \frac{k}{n\alpha} p I_{m-k+n}^{(s)} - \frac{k}{n\alpha} \tilde{f}_{m-k+n}^{(s)}(p), \\ \text{при } m = \overline{k+1-n, k-1}, s > 0. \tag{17}$$

Процесс построения с их помощью уравнения относительно $I_0(p)$ выглядит следующим образом: на первом шаге мы берем уравнение системы (11), в левой части которого находится функция $I_0(p)$:

$$I_0(p) = -\frac{k^2-n}{n\alpha} I_n(p) - \frac{k^2}{n\alpha} p I'_n(p) - \frac{k^2}{n\alpha} \tilde{f}'_n(p). \tag{18}$$

Второй шаг заключается в следующем: если $n = k - n$, то выразив в уравнении (18) $I_n(p)$ и $I'_n(p)$ через $I_0(p)$ и $I'_0(p)$ по формуле (15) сразу получим уравнение вида (14). Если $n < k - n$, то аналогично с помощью формулы (16) получим уравнение вида

$$I_0(p) = \tilde{h}_2(p) + \sum_{i=0}^{2} a_i^2 p^i I_{2n}^{(i)}(p),$$

где $\tilde{h}_2(p)$ — голоморфная функция, a_i^2 — числовые коэффициенты. Если $n > k - n$, то мы не можем выразить функцию $I_n(p)$ через производные другой неизвестной функции — только производные $I_n(p)$, начиная с первой. Аналогично тому, как это было сделано в модельном примере, это затруднение можно преодолеть, продифференцировав обе части уравнения (18), после чего правая часть полученного уравнения будет содержать только производные функции $I_n(p)$, но не ее саму, что позволит, заменив их по формуле (17), получить уравнение вида

$$I'_0(p) = \tilde{h}_2(p) + \sum_{i=0}^{2} a_i^2 p^i I_{2n-k}^{(i)}(p).$$

Далее, на каждом шаге нашего процесса в правой части уравнения будет находится некоторый дифференциальный оператор, примененный к некоторой неизвестной функции $I_m(p)$. Следующий шаг процесса зависит от m:

Если $m = 0$, то процесс завершен, мы получили требуемое уравнение.

Если $m = k - n$, то нам остается сделать последний шаг, заменив функцию $I_m(p)$ и все ее производные по формуле (15).

Если $m < k - n$, то чтобы произвести очередной шаг процесса мы заменим функцию $I_m(p)$ и все ее производные по формуле (16).

Если же $m > k - n$, то продифференцируем обе части уравнения, полученного на предыдущем шаге, после чего заменим производные функции $I_m(p)$ по формуле (17).

Так как каждая неизвестная функция входит ровно в два уравнения системы (11), то данный процесс определен однозначно и конечен (т.к. на однажды встреченную, а затем выраженную из другого уравнения неизвестную функцию мы больше никогда не натолкнемся, а число неизвестных функций конечно). По индукции легко доказать, что уравнение, получаемое после m шагов процесса при условии того, что m-й шаг не являлся последним, имеет вид

$$I_0^{(s_m)}(p) = \tilde{h}_m(p) + \sum_{i=0}^{m} a_i^m p^i I_{j_m}^{(i)}(p), \qquad (19)$$

где $I_{j_m}(p)$ — неизвестная функция, содержащаяся в правой части уравнения, с помощью которого осуществлялась замена на m-м шаге, $\tilde{h}_m(p)$ — некоторая голоморфная функция, a_i^m — числовые коэффициенты, а s_m — количество уравнений системы (11), в левых частях которых фигурировали производные неизвестной функции, которые были задействованы в первых m шагах процесса.

Тогда на предпоследнем шаге мы получим уравнение

$$I_0^{(s_j)}(p) = \tilde{h}_j(p) + \sum_{i=0}^{j} a_i^j p^i I_{k-n}^{(i)}(p).$$

Здесь j — порядковый номер предпоследнего шага. Совершив с помощью формулы (15) последний шаг, получим уравнение вида (14). Ясно, что значения коэффициентов этого уравнения, равно как и чисел s и j, зависят от того, сколько и каких уранений из системы (11) было задействовано в описанном процессе. При этом, как показывает модельный пример, таковыми оказываются, вообще говоря, не все уравнения исходной системы.

Покажем, что числа j и s действительно задаются формулой (13). Для этого выясним, какие уравнения системы (11) использовались при получении уравнения (14). Заметим, что формулы (15)–(17) дают следующее рекуррентное соотношение для индексов j_m неизвестных функций $I_{j_m}(p)$ уравнений (19)

$$j_{m+1} = \begin{cases} j_m + n, & j_m \le k-n-1, \\ j_m + n - k, & k-n \le j_m \le k-1 \end{cases} \qquad (20)$$

Так как $j_1 = n$, то все индексы j_m представимы в виде $j_m = xn - yk$, где $x, y \in \mathbb{Z}$. Отсюда вытекает, что $\text{НОД}(n,k)$ является делителем j_m для всех m. Так как процесс построения уравнения (14) завершается когда индекс неизвестной функции в правой части уравнения становится равным нулю, то ясно, что в нем будут задействованы все уравнения индексы неизвестных функций в правых частях которых делятся на $\text{НОД}(n,k)$. Всего таких уравнений $k/\text{НОД}(n,k)$, из них $n/\text{НОД}(n,k)$ содержат знак производной в левой части. Таким образом, если ввести обозначение $l = \text{НОД}(n,k)$, то числа s и j выражаются следующим образом

$$s = \frac{n}{l} - 1; \;\; j = \frac{k}{l} - 1,$$

причем, по условию, $n < k$, а, следовательно, и $s < j$. Таким образом мы получили относительно $I_0(p)$ следующее линейное дифференциальное уравнение:

$$a_j p^{j+1} I_0^{(j)}(p) + \dots + a_{s+1} p^{s+2} I_0^{(s+1)}(p) + (a_s p^{s+1} - \\ - 1) I_0^{(s)}(p) + a_{s-1} p^s I_0^{(s-1)}(p) + \dots + \\ + a_1 p^2 I'_0(p) + a_0 p I_0(p) = -\tilde{h}(p).$$

Такие уравнения рассматривались в работе [1], где было показано, что уравнения вида

$$\sum_{i=0}^{j} a_i(p) \frac{\mathrm{d}^i}{\mathrm{d}p^i} u(p) = f(p),$$

где $a_i(p) = p^{q_i} c_i(p)$, причем функции $c_i(p)$ — голоморфные и $c_i(0) \ne 0$, представимы в виде

$$\sum_{i=0}^{j} \tilde{a}_i(p) \left(-\frac{1}{\gamma} p^{\gamma+1} \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}p}\right)^i u(p) = p^{j(\gamma+1)-q_n} f(p)$$

для всех γ таких, что

$$\gamma + 1 \ge \\ \ge \max\left\{q_n - q_{n-1}, \frac{q_n - q_{n-2}}{2}, \frac{q_n - q_{n-3}}{3}, \dots, \frac{q_n - q_0}{n}\right\},$$

причем

$$\begin{cases} \tilde{a}_0(p) = p^{j(\gamma+1)-q_n} a_0(p), \\ \tilde{a}_i(p) = \dfrac{1}{b_i^i} (p^{(j-i)(\gamma+1)-q_n} a_m(p) - \\ - \tilde{a}_j(p) b_i^j p^{\gamma(j-i)} - \dots - \tilde{a}_{i+1}(p) b_i^{i+1} p^{\gamma}), i = \overline{1,j}, \end{cases} \qquad (21)$$

где числа b_i^j $(j,\ i \in \mathbb{N},\ i \le j)$ определяются рекуррентными соотношениями

$$\begin{cases} b_1^1 = -\dfrac{1}{\gamma}, \\ b_j^j = -\dfrac{1}{\gamma} b_{j-1}^{j-1} = \left(-\dfrac{1}{\gamma}\right)^j, & j \ge 2, \\ b_1^j = -\dfrac{1}{\gamma}(\gamma(j-1)+1) b_1^{j-1}, & j \ge 2, \\ b_i^j = -\dfrac{1}{\gamma}\left((\gamma(j-1)+i) b_i^{j-1} + b_{i-1}^{j-1}\right), & j \ge 2, i = \overline{2, j-1}. \end{cases}$$

Это значит, что если мы выберем

$$\gamma + 1 = \frac{j+1}{j-s} = \frac{k}{k-n},$$

то, воспользовавшись формулами (21), мы легко сможем показать, что рассматриваемое уравнение можно представить в виде (12). ■

Сделав в (12) замену $t = p^{\gamma}, w(t) = I_0(p)$, получим уравнение

$$\sum_{i=s+1}^{j} c_i t^{j-i} \left(-t^2 \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\right)^i w(t) + \\ + \sum_{i=1}^{s} (c_i t^{j-i} + \\ + c'_i t^{s-i}) \left(-t^2 \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\right)^i w(t) + \\ + a_0 t^j w(t) = t^{j-1/\gamma} \tilde{h}(t^{1/\gamma}) \qquad (22)$$

Это уравнение с младшими вырождениями. Его символ

$$H(t,q) = \sum_{i=s+1}^{j} c_i t^{j-i} q^i + \\ + \sum_{i=1}^{s} (c_i t^{j-i} + c'_i t^{s-i}) q^i + a_0 t^j. \qquad (23)$$

Его основной символ

$$H_0(q) = H(0,q) = c_j q^j - c'_s q^s \qquad (24)$$

имеет корень 0 кратности s и $j - s$ корней кратности 1 — всевозможные значения

$$\sqrt[j-s]{-\frac{c'_s}{c_j}}.$$

Если $s \ge 2$, то основной символ имеет кратный корень. Если $s \le 1$, то все корни основного символа являются простыми, причем при $s = 1$ один из корней является нулевым, что порождает резонанс с правой частью, а при $s = 0$ нулевого корня и, как следствие, резонанса нет. Асимптотики решений уравнений с младшими вырождениями, основной символ которых свободен от кратных корней, в нерезонансном случае были получены в работе [2], а в резонансном — в работе [4]. В частности верны следующие две теоремы.

Теорема 2. Если натуральное число n является делителем числа k, то k-преобразование Лапласа-Бореля функции $\exp(\alpha/r^n)$ имеет асимптотическое разложение

$$\sum_{l=1}^{k/n-1} \exp(q_l/p^{\frac{n}{k-n}})p^{\frac{\sigma n}{k-n}}\sum_{i=0}^{\infty} s_i^l p^{\frac{in}{k-n}} + \sum_{i=0}^{\infty} s_i p^i,$$

где

$$q_l = \sqrt[(k-n)/n]{\frac{\alpha^{k/n} n(k-n)^{(k-n)/n}}{k^{(2k-n)/n}}},$$

$$\sigma = \frac{1}{(n\alpha)^{(k-n)/n}}\left(\frac{k(k-2n)}{2n^2} - \frac{k-n}{n} - \right.$$
$$\left. - \frac{k^2-n}{k^{k/n}} \sum_{i=1}^{(k-n)/n} ik^{i-1}\right),$$

s_i^l, s_i — числовые коэффициенты.

Доказательство. Как уже было сказано, вид асимптотики решения уравнения (22) для случая $s=0$ найден в работе [2]:

$$w(t) = \sum_{l=1}^{j} \exp(q_l/t)t^{\sigma_l}\sum_{i=0}^{\infty} s_i^l t^i + \sum_{i=0}^{\infty} s_i t^{i/\gamma},$$

где q_l — различные комплексные корни j-й степени числа $1/c_j$, а

$$\sigma_l = \sigma = \frac{c_{j-1}}{jc_j}.$$

Найти явное выражение коэффициентов c_j и c_{j-1} уравнения (22) через k, n и α можно, пользуясь доказательством теоремы 1: достаточно по индукции доказать, что при $s=0$ в уравнениях (19)

$$a_m^m = \left(-\frac{k^2}{n\alpha}\right)^m, \tag{25}$$

$$a_{m-1}^m = (-1)^m \frac{k^2-n}{(n\alpha)^m} k^{m-1} \sum_{i=1}^{m} ik^{i-1}. \tag{26}$$

С помощью данных формул, а также формулы (15), можно найти явный вид коэффициентов a_j и a_{j-1} в уравнении (14), через которые с помощью формул (21) явно выражаются искомые коэффициенты c_j и c_{j-1}. Вернувшись после этого к исходным переменным получим утверждение теоремы. ■

С использованием асимптотик, найденных в работе [4], полностью аналогично доказывается

Теорема 3. Если натуральное число $n = 2\text{НОД}(n,k)$ *(т.е.* $s=1$*)*, то k-преобразование Лапласа-Бореля функции $\exp(\alpha/r^n)$ имеет асимптотическое разложение

$$\sum_{l=1}^{2(k-n)/n} \exp(q_l/p^{\frac{n}{k-n}})p^{\frac{\sigma n}{k-n}}\sum_{i=0}^{\infty} s_i^l p^{\frac{in}{k-n}} + \sum_{i=0}^{\infty} s_i p^i,$$

где

$$q_l = \sqrt[2(k-n)/n]{\frac{\alpha^{2k/n} n^2(k-n)^{2(k-n)/n}}{k^{2(2k-n)/n}}},$$

σ, s_i^l, s_i — числовые коэффициенты.

При $s \geq 2$, уравнение (22) имеет кратный корень в основном символе, однако, можно показать, что в таком случае оно является уравнением с коническим вырождением в p-представлении, исследованию которых посвящен следующий раздел.

VI. Уравнения с коническим вырождением в $\boldsymbol{p}$-представлении

Будем рассматривать уравнения вида

$$\sum_{i=n+1}^{n+M} h_i(r^k)\left(-\frac{1}{k}r^{k+1}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}r}\right)^i u(r) +$$
$$+ \sum_{i=1}^{n} r^{(n-i)k} h_i(r^k)\left(-\frac{1}{k}r^{k+1}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}r}\right)^i u(r) = g(r), \tag{27}$$

где $h_i(r^k)$ — полиномы, $h_n(0) \neq 0$, $h_{n+M}(0) \neq 0$, а $g(r)$ — k-ресургентная функция, которая имеет асимптотическое разложение вида

$$\sum_j r^{\sigma_j} \sum_{l=0}^{m_j} \ln^l r \sum_{i=0}^{\infty} A_{ij}^l r^i, \qquad \sigma_j \in \mathbb{R}. \tag{28}$$

Ясно, что основной символ этого уравнения

$$H_0(p) = \sum_{i=n}^{n+M} h_i(0)p^i$$

имеет нулевой корень кратности n. Будем предполагать, что все остальные его корни — простые. В таком случае имеет место

Теорема 4. Пусть функция $u(r)$ является решением уравнения (27), тогда, при сделанных выше предположениях, она k-ресургентна и представима в виде

$$u(r) = \sum_j u_j(r),$$

где сумма берется по объединению p_j корней полинома $H_0(p)$, а функции $u_j(r)$ являются обратными преобразованиями Лапласа-Бореля функций, имеющих особенности в точках p_j, и имеют асимптотические разложения

$$u_j(r) = \exp\left(\frac{p_j}{r^k} + \sum_{i=1}^{k-1} \frac{\alpha_{k-i}^j}{r^{k-i}}\right) r^{\sigma_j} \sum_{i=0}^{\infty} s_i^j r^i$$

при $p_j \neq 0$. Компонент $u_0(r)$, соответствующий нулевому корню полинома $H_0(p)$ имеет асимптотическое разложение

$$u_0(r) = \sum_{l=0}^{m} r^{k(-x_l+1)} \sum_{i=0}^{\infty} \sum_{j=0}^{m_{il}} A_j^{il} r^i \ln^j r. \tag{29}$$

Доказательство. Вычисление компонентов асимптотики решения, соответствующих простым корням основного символа произведено в работе [8], поэтому здесь построим только асимптотику, соответствующую единственному кратному (нулевому) корню. Делать это мы будем по следующему плану: применим k-преобразование Лапласа-Бореля, сведем полученное уравнение к уравнению с коническим вырождением и функцией, представимой в виде конормальной асимптотики в правой части. Решение этого уравнения, как показано, например, в [9], также будет представляться конормальной асимптотикой, что позволит нам вычислить соответствующий компонент асимптотики решения исходного уравнения, взяв ее обратное k-преобразование Лапласа-Бореля.

Сначала выберем достаточно большое натуральное число N, такое что все полиномы $h_i(r^k)$ будут представимы в виде

$$h_i(r^k) = \sum_{j=0}^{\min\{i+N,n+N\}} h_i^j r^{jk}.$$

Теперь мы можем переписать уравнение (27) в виде

$$\begin{aligned} &r^{(n+N)k} H_{n+N}\left(-\frac{1}{k} r^{k+1} \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}r}\right) u(r) + \\ &+ r^{(n+N-1)k} H_{n+N-1}\left(-\frac{1}{k} r^{\mathrm{k}+1} \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}r}\right) u(r) + \dots + \\ &+ r^k H_1\left(-\frac{1}{k} r^{\mathrm{k}+1} \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}r}\right) u(r) + \\ &+ H_0\left(-\frac{1}{k} r^{\mathrm{k}+1} \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}r}\right) u(r) = g(r). \end{aligned} \tag{30}$$

Здесь

$$\begin{aligned} H_i(p) = h_{n+M}^i p^{n+M} + h_{n+M-1}^i p^{n+M-1} + \dots + h_n^i p^n + \\ + h_{n-1}^{i-1} p^{n-1} + \dots + h_{\max\{0,n-i\}}^{\min\{0,i-n\}} p^{\max\{0,n-i\}} \end{aligned}$$

В работе [10] получена формула коммутации оператора B_k и оператора домножения на r^k:

$$B_k[r^k u(r)](p) = \int_\infty^p \tilde{u}(p')\mathrm{d}p'.$$

Пользуясь ей, применим k-преобразование Лапласа-Бореля к обеим частям (30):

$$\begin{aligned} &\int_\infty^p \int_\infty^{p_1} \dots \int_\infty^{p_{n+N-1}} H_{n+N}(p_{n+N}) \tilde{u}(p_{n+N}) \mathrm{d}p_{n+N} \dots \mathrm{d}p_1 + \\ &+ \int_\infty^p \int_\infty^{p_1} \dots \int_\infty^{p_{n+N-2}} H_{n+N-1}(p_{n+N-1}) \times \\ &\times \tilde{u}(p_{n+N-1}) \mathrm{d}p_{n+N-1} \dots \mathrm{d}p_1 + \dots + \\ &+ \int_\infty^p H_1(p_1)\tilde{u}(p_1)\mathrm{d}p_1 + H_0(p)\tilde{u}(p) = \\ &= \tilde{g}(p). \end{aligned}$$

Продифференцируем $n + N$ раз:

$$\begin{aligned} &H_{n+N}(p)\tilde{u}(p) + \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}p} H_{n+N-1}(p)\tilde{u}(p) + \dots + \\ &+ \frac{\mathrm{d}^{n+N-1}}{\mathrm{d}p^{n+N-1}} H_1(p)\tilde{u}(p) + \\ &+ \frac{\mathrm{d}^{n+N}}{\mathrm{d}p^{n+N}} H_0(p)\tilde{u}(p) = \frac{\mathrm{d}^{n+N}}{\mathrm{d}p^{n+N}} \tilde{g}(p). \end{aligned}$$

Покоммутируем дифференцирования с домножениями на многочлены:

$$\begin{aligned} &H_{n+N}(p)\tilde{u}(p) + \sum_{i=0}^{1} C_1^i H_{n+N-1}^{(1-i)}(p) \frac{\mathrm{d}^i}{\mathrm{d}p^i} \tilde{u}(p) + \dots + \\ &+ \sum_{i=0}^{n+N-1} C_{n+N-1}^i H_1^{(n+N-1-i)}(p) \frac{\mathrm{d}^i}{\mathrm{d}p^i} \tilde{u}(p) + \\ &+ \sum_{i=0}^{n+N} C_{n+n}^i H_0^{(n+N-i)}(p) \frac{\mathrm{d}^i}{\mathrm{d}p^i} \tilde{u}(p) = \frac{\mathrm{d}^{n+N}}{\mathrm{d}p^{n+N}} \tilde{g}(p). \end{aligned}$$

Здесь C_j^i — биномиальные коэффициенты. Сгруппируем слагаемые при производных одинаковых порядков:

$$\begin{aligned} &C_{n+N}^{n+N} H_0(p) \frac{\mathrm{d}^{n+N}}{\mathrm{d}p^{n+N}} \tilde{u}(p) + \\ &+ (C_{n+N-1}^{n+N-1} H_1(p) + \\ &+ C_{n+N}^{n+N-1} H_0'(p)) \frac{\mathrm{d}^{n+N-1}}{\mathrm{d}p^{n+N-1}} \tilde{u}(p) + \\ &+ \dots + \\ &+ \left(C_0^0 H_{n+N}(p) + C_1^0 H_{n+N-1}'(p) + \right. \\ &\left. + \dots + C_{n+N}^0 H_0^{(n+N)}(p)\right)\tilde{u}(p) = \\ &= \frac{\mathrm{d}^{n+N}}{\mathrm{d}p^{n+N}} \tilde{g}(p). \end{aligned} \tag{31}$$

Полиномы $H_i(p)$ представляются в виде $H_\mathrm{i}(p) = p^{\max\{0,n-i\}} P_i^0(p)$, где $P_i^0(p)$ — полиномы. Значит, для их производных верно, что

$$H_i^{(j)} = p^{\max\{0,n-i-j\}} P_i^j(p),$$

где $P_i^j(p)$ — также некоторые полиномы. Воспользовавшись этим, а также домножив обе части уравнения (31) на p^N, окончательно перепишем уравнение в виде

$$\begin{aligned} &p^{n+N} C_{n+N}^{n+N} P_0^0(p) \frac{\mathrm{d}^{n+N}}{\mathrm{d}p^{n+N}} \tilde{u}(p) + \\ &+ p^{n+N-1}(C_{n+N-1}^{n+N-1} P_1^0(p) + \\ &+ C_{n+N}^{n+N-1} P_0^1(p)) \frac{\mathrm{d}^{n+N-1}}{\mathrm{d}p^{n+N-1}} \tilde{u}(p) + \dots + \\ &+ p^N (C_N^N P_n^0(p) + C_{N+1}^N P_{n-1}^1(p) + \dots + \\ &+ C_{n+N}^N P_0^n(p))\tilde{u}(p) + \dots + \\ &+ p^N (\mathrm{C}_0^0 P_{n+N}^0(p) + C_1^0 P_{n+N-1}^1(p) + \dots + \\ &+ C_{n+N}^0 P_0^{n+N}(p))\tilde{u}(p) = p^N \frac{\mathrm{d}^{n+N}}{\mathrm{d}p^{n+N}} \tilde{g}(p). \end{aligned} \tag{32}$$

Полностью аналогично лемме 1 из работы [1] доказывается

Лемма 1. Оператор

$$X\left(r, \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}r}\right) = \sum_{m=0}^{n} a_m(r) \frac{\mathrm{d}^m}{\mathrm{d}r^m},$$

такой, что его коэффициенты $a_m(r)$ имеют вид $a_m(r) = r^{q_m} c_m(r)$, где функции $c_m(r)$ — голоморфные, и $c_m(0) \neq 0$ представим в виде

$$\widehat{H} = \sum_{m=0}^{n} \tilde{a}_m(r) \left(-r \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}r}\right)^m,$$

где функции $\tilde{a}_m(r)$ — голоморфные, и $\tilde{a}_n(0) \neq 0$, тогда и только тогда, когда для степеней вырождения q_m коэффициентов $a_m(r)$ оператора $\hat{X}$ выполнены условия

$$q_n = n; \ q_m \geq m, \qquad \forall m = \overline{0, n-1}.$$

Легко заметить, что для оператора в левой части уравнения (32) условие леммы 1 эквивалентно требованию $P_0^0(0) \neq 0$, что выполнено, так как $P_0^0(0) = h_n^0 = h_n(0) \neq 0$ по условию теоремы. Таким образом, уравнение (32) есть уравнение с коническим вырождением. Покажем теперь, что правая часть этого уравнения представима в виде конормальной асимптотики. Для этого нам потребуется

Лемма 2. k-преобразования Лапласа-Бореля функций $r^\sigma ln^n r$, при $\sigma \in \mathbb{R}$, $n \in \mathbb{N}$ имеют вид

$$B_k[r^\sigma \ln^n r] = \begin{cases} p^{\frac{\sigma}{k}-1} \sum_{i=0}^{n} \check{c}_{k,\sigma}^{i,n} \ln^i p, & \frac{\sigma}{k} \notin \mathbb{N}, \\ p^{\frac{\sigma}{k}-1} \sum_{i=0}^{n} \check{c}_{k,\sigma}^{i,n} \ln^{i+1} p, & \frac{\sigma}{k} \in \mathbb{N}; \end{cases} \tag{33}$$

обратные k-преобразования Лапласа-Бореля функций $p^{\alpha}\ln^{n}p$, при $\alpha \in \mathbb{R}$, $n \in \mathbb{N}$ имеют вид

$$B_k^{-1}[p^{\alpha}\ln^{n}p] = r^{k(\alpha+1)}\sum_{i=0}^{n} c_{k,\alpha}^{i,n}\ln^{i}r. \qquad (34)$$

Здесь $\check{c}_{k,\sigma}^{i,n}$ и $c_{k,\alpha}^{i,n}$ — некоторые постоянные, причем $c_{k,\alpha}^{n,n} = 0$ тогда и только тогда, когда $\alpha \in \mathbb{N}_0$, но в таком случае, верно, что $c_{k,\alpha}^{n-1,n} \neq 0$.

Доказательство. Докажем сначала формулу (34). Пользуясь известными свойствами k-преобразования Лапласа-Бореля получаем

$$B_k^{-1}\left[\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}p}(p^{\alpha+1}\ln p)\right] = -\frac{1}{r^k}B_k^{-1}[p^{\alpha+1}\ln p] = $$
$$= -\frac{1}{r^k}\left(-\frac{1}{k}r^{k+1}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}r}\right)B_k^{-1}[p^{\alpha}\ln p] = $$
$$= \frac{1}{k}r\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}r}B_k^{-1}[p^{\alpha}\ln p].$$

С другой стороны,

$$B_k^{-1}\left[\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}p}(p^{\alpha+1}\ln p)\right] = B_k^{-1}[(\alpha+1)p^{\alpha}\ln p + p^{\alpha}].$$

Обозначив $B_k^{-1}[p^{\alpha}\ln^{n}p] = I_{k,\alpha}^{n}$, мы можем выписать уравнение

$$\frac{1}{k}r\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}r}I_{k,\alpha}^{1} = (\alpha+1)I_{k,\alpha}^{1} + B_k^{-1}[p^{\alpha}].$$

Пользуясь известными (см., например, [10]) формулами для вычисления $B_k[r^{\sigma}]$, легко показать, что $B_k^{-1}[p^{\alpha}] = c_{\alpha}r^{k(\alpha+1)}$, где $c_{\alpha} = 0$ тогда и только тогда, когда $\alpha \in \mathbb{N}_0$. Имеем,

$$\frac{1}{k}r\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}r}I_{k,\alpha}^{1} = (\alpha+1)I_{k,\alpha}^{1} + c_{\alpha}r^{k(\alpha+1)}.$$

Решив данное уравнение, получим

$$B_k^{-1}[p^{\alpha}\ln p] = c_{k,\alpha}^{0,1}r^{k(\alpha+1)} + c_{k,\alpha}^{1,1}r^{k(\alpha+1)}\ln r,$$

где $c_{k,\alpha}^{1,1} = kc_{\alpha}$. Таким образом, $c_{k,\alpha}^{1,1} = 0$ тогда и только тогда, когда $\alpha \in \mathbb{N}_0$, но в таком случае $c_{k,\alpha}^{0,1} \neq 0$, так как функция $p^{\alpha}\ln p$ не является голофморфной, а значит ее обратное k-преобразование Лапласа-Бореля не является нулевым.

Составляя аналогичные уравнения, формулу (34) по индукции легко доказать для произвольного натурального n. Формула (33) также легко доказывается индукцией по n и применением оператора B_k к левой и правой частям формулы (34). ■

Теперь представимость правой части уравнения (32) в виде конормальной асимптотики доказывается тривиально, с учетом ограничений, наложенных на вид функции $g(r)$. При этом, каждому слагаемому во внешней сумме ее асимптотики (28) в r-представлении будет соответствовать k слагаемых вида

$$p^{\frac{\sigma_j+s}{k}-1}\sum_{l=0}^{m_j+1}\ln^{l}r\sum_{i=0}^{\infty}B_{ij}^{l}r^{i}, \qquad s = \overline{0, k-1}$$

в p-представлении.

Мы доказали, что уравнение (32) является уравнением с коническим вырождением и функцией, представимой в виде конормальной асимптотики в правой части. Значит, решение данного уравнения также представимо в виде конормальной асимптотики. Вычисляя с помощью леммы 2 ее прообраз тривиально получим формулу (29), что и завершит доказательство всей теоремы. ■

Вернемся теперь к задаче вычисления k-преобразования Лапласа-Бореля функции $\exp(\alpha/r^{n})$: в предыдущем разделе она была решена при $s = 0$ и $s = 1$. Что же касается всех остальных случаев, то несложно заметить, что при $s \geq 2$ уравнение (22) является частным случаем уравнения (27), а значит применением теоремы 4 и возвратом к переменной p легко доказывается

Теорема 5. Если натуральное число $n > 2\text{НОД}(n,k)$, то k-преобразование Лапласа-Бореля функции $\exp(\alpha/r^{n})$ имеет асимптотическое разложение

$$\sum_{l=1}^{(k-n)/\text{НОД}(n,k)} \exp\left(\frac{q_l}{p^{\gamma}}\right)p^{\sigma_l\gamma}\sum_{i=0}^{\infty}s_i^{l}p^{i\gamma} +$$
$$+\sum_{l=0}^{\mu}p^{(1-x_l)\gamma}\sum_{i=0}^{\infty}p^{i\gamma}\sum_{m=0}^{n_{il}}A_m^{il}\ln^{m}(p^{\gamma})$$

где q_l — ненулевые корни полинома (24), $\gamma = n/(k-n)$; σ_l, x_l, s_i^{l}, A_m^{il} — числовые коэффициенты.

С учетом всего вышесказанного, также можно утверждать, что верна

Теорема 6. Пусть $k,\ n \in \mathbb{N},\ 1 \leq n < k,\ \gamma = n/(k-n)$, тогда $B_{\gamma}[B_k\exp(\alpha/r^{n})]$ представляется в виде суммы конормальных асимптотик.

Благодарности

Автор выражает глубокую благодарность М.В. Коровиной за многочисленные обсуждения и помощь при написании данной работы.

Библиография

[1] Кац Д.С. Вычисление асимптотик решений уравнений с полиномиальными вырождениями коэффициентов. // Дифференц. уравнения. 2015. Т. 51. № 12. С. 1612–1617.

[2] Коровина М.В., Шаталов В.Е. Дифференциальные уравнения с вырождением и ресургентный анализ. // Дифференц. уравнения. 2010. Т. 46. № 9. С. 1259–1277.

[3] Коровина М.В. Асимптотики решений неоднородных уравнений со старшими вырождениями. // Дифференц. уравнения. 2013. Т. 49. № 2. С. 255–259.

[4] Волнухин М.М. Асимптотики решений дифференциальных уравнений с вырождениями в случае резонанса. // ДАН. 2013. Т. 449. № 3. С. 259–262.

[5] F.W.J. Olver. Asymptotics and Special Functions. Academic Press. 1974.

[6] Коровина М.В. Метод повторного квантования и его применения к построению асимптотик решений уравнений с вырождениями. // Дифференц. уравнения. 2016. Т. 52. № 1. С. 60–77.

[7] Sternin B., Shatalov V. Borel-Laplace Transform and Asymptotic Theory. Introduction to Resurgent Analysis. CRC Press, 1996.

[8] Коровина М.В. Асимптотики решений уравнений с высшими вырождениями. // ДАН. 2011. Т. 437. № 3, С. 302–304.

[9] Коровина М.В. Теория функциональных пространств и дифференциальные уравнения. Москва, 2007.

[10] Коровина М.В. Существование ресургентного решения для уравнений с вырождением высших порядков. // Дифференц. уравнения. 2011. Т. 47. № 3. С. 349–357.

International Journal of Open Information Technologies ISSN: 2307-8162 vol. 5, no.3, 2017

On a Problem Arising when Solving Equations with Singularities

Dmitry Kats

***Abstract* — The article considers a problem that arises when solving equations with degenerating coefficients, specifically, the need to compute k-Laplace-Borel transform of functions of the form $\exp(\alpha/r^n)$. The paper shows that such problems can be reduced to equations with lesser cusp-type singularities. With the help of Laplace-Borel transform these equations are reduced to equations with regular singularities. Asymptotics of solutions to the latter are built as well as asymptotics of k-Laplace-Borel transforms of initially considered functions.**

***Keywords* — asymptotic expansions, singularities, differential equations, resurgent analysis, Laplace transform, Borel transform.**