Обратные арифметические операции

Расплетин Б.К., Каменщиков А.А.

***Аннотация*— В настоящей работе ранее предложенный Расплетиным Б.К. способ изучения прямых арифметических операций через их представление в виде матриц распространен на матрицы обратных арифметических операций. Это позволило, изучая матрицы обратных операций, просто и наглядно показать порождение различных известных видов чисел, правил оперирования с нецелыми числами, а также получить новые числовые объекты – псевдочисла. Впервые построены три матрицы: две для левой и правой обратных операций для операции возведения в ранг (левой свертки операции возведения в степень), а также построена матрица обратной операции предвычетания для самой первой прямой операции, предсложения (зерации).**

***Ключевые слова*— прямая арифметическая операция, коммунитативность и некоммунитативность, левая и правая обратные арифметические операции, матрица операции.**

I. Введение

В середине 1970-х годов Борис Константинович Расплетин (1946-2009) систематизировал прямые арифметические операции на основе известного всем правила, что каждая следующая прямая операция является сверткой предыдущей операции (умножение, например, есть свертка сложения). Он исследовал матрицы операций в виде всем известных таблиц умножения и при этом обнаружил, что в матрицах всех прямых операций соседние элементы связаны между собою через предыдущую операцию. Это позволило ему найти прямую арифметическую операцию, предшествующую сложению, Расплетин Б.К. назвал ее предсложением, он также построил операцию возведение в ранг, следующую за возведением в степень. Работа «Прямые арифметические операции» Б.К.Расплетина по его сохранившейся рукописи была опубликована в 2011 году [1]. После этого события обнаружилось, что официально первая статья об обнаружении операции предсложения принадлежит российскому математику Рубцову К.А. [2], который опубликовал свою работу в 1989 году. Он нашел ту же операцию, предсложения, предшествующую сложению, что и Расплетин Б.К., на основе других, не матричных, соображений и построений, но по сути близких. В 2001 году итальянский математик Дж.Ромерио предложил назвать эту операцию - zeration (зерация, от слова zero – нуль, если считать первой операцией сложение). В работе [3] Каменщиков А.Ф. доказал формулу Расплетина о связи элементов в матрице прямой арифметической операции через предыдущую прямую операцию, он также показал, что до предсложения нет однозначной прямой операции. В работе [4] Каменщиков А.Ф. и Каменщиков А.А. показали, что вследствие некоммутативности возведения в степень, возникают не одна, как обычно считали, а две следующие прямые арифметические операции: левая свертка - операция возведения в ранг, построенная Расплетиным Б.К. [1] и правая свертка - операция тетрация (сверхстепень). В работе [5] Каменщиков А.Ф. и Каменщиков А.А. предложили общие формулы свертки для прямых арифметических операций.

II. Обратные арифметические операции

В той же рукописи середины 1970-х годов Б.К.Расплетин на основе матричного подхода анализирует также и обратные арифметические операции, что позволяет прийти к интересным выводам и обнаружить новые числовые объекты.

В записи сопряжения числа a с числом b через операцию сопряжения **z** (**z** = …$\perp$, +, •, ’,… или буквенное обозначение) результирующее число

c=a **z** b будем в дальнейшем называть синтезисом· c сопряжения тезиса a с антитезисом b. Операция **z**, посредством которой сопряжением тезиса a с антитезисом b получаем c называется прямой операцией.

Но, зная синтезис и тезис, можно восстановить (а в иных случаях так и просто выявить) антитезис. Аналогично, зная синтезис и антитезис, можно восстановить тезис. Операцию определения тезиса a по известному синтезису c и антитезу b будем называть обратной **y** по отношению к прямой операции **z** и левой по отношению к сочетанию a **z** b (a=c **‹y** b). Операцию определения антитезиса b по известным синтезису c и тезису a будем называть обратной (**y›**) по отношению к прямой операции **z** и правой по отношению к сочетанию a **z** b (b=a **y›** c). Знак инверсии будем ставить слева от **y** при обозначении обратной левой операции **‹y**, и справа от символа операции **y** при обозначении обратной правой операции **y›**.

Построим матрицу левой обратной операции для прямой операции сложения (**z=a**). Обратную операцию для сложения принято называть вычитанием

Статья получена 24 апреля 2016. Написана по рукописи Расплетина Б.К. и дополнена с учетом последних результатов, полученных уже после его смерти.

Расплетин Борис Константинович (1946-2009). Закончил МИФИ, факультет теоретической и экспериментальной физики и аспирантуру Института истории естествознания и техники, работал в том числе заведующим лаборатории в НИИ «Информэлектро».

Каменщиков Андрей Александрович (1982г.р.). Закончил МИФИ, факультет теоретической и экспериментальной физики, кандидат технических наук, научный сотрудник ИРЭ им. В.А. Котельникова РАН (e-mail: prostonau@mail.ru).

(обозначим **y=s**). По горизонтали будем откладывать уменьшаемое *c*, по вертикали – вычитаемое *b*, а на пересечениях – разность *a*=*c* ‹**s** *b* . Получим следующую матрицу:

ТАБЛИЦА 1

Матрица вычитания **s**

b \ *c*	1	2	3	4	5
5	-4	-3	-2	-1	0
4	-3	-2	-1	0	1
3	-2	-1	0	1	2
2	-1	0	1	2	3
1	0	1	2	3	4

Здесь числа, получаемые вычитанием из большего числа меньшего – уже знакомые нам, так называемые, положительные числа, а числа, симметричные им в матрице относительно диагонали и получаемые вычитанием из меньшего числа большего – новый тип чисел, которые принято называть отрицательными. Диагональными элементами матрицы являются особые числа, точнее число, которое получается при вычитании числа из самого себя и называется это число - ноль

0= *c* ‹**s** *c*

Следует обратить внимание на то, знак минус отмечает лишь особую природу отрицательных чисел и ни в коем случае не может трактоваться в качестве знака вычитания. Вероятно, следовало бы даже ввести самостоятельные обозначения для отрицательных чисел, например, -1=α, -2=β, -3=γ и т.д., что окончательно уничтожило бы всякую возможность ошибочно трактовать знак минус в отрицательных числах как операцию вычитания. Но так как в настоящей работе мы ввели новое обозначение для операций, то считаем возможным оставить традиционную форму записи отрицательных чисел, тем более, что это основано на некоторой чисто символической симметрии матрицы вычитания (в случае действительной симметрии матрицы вычитания на месте отрицательных чисел должны были бы стоять положительные).

Так как операция сложения коммутативна (что следует из симметрии ее матрицы относительно диагонали [1]), т.е. *a* **a** *b* = *b* **a** *a* = *c,* то обратная правая операция от сложения совпадает с уже рассмотренной обратной левой, т.е. ‹**s** = **s**› .

Воспользовавшись операцией вычитания, построим числовую ось на основе элементов матрицы ‹**s** :

…, 5 ‹**s** 3 = -2, 4 ‹**s** 3 = -1, 3 ‹**s** 3 = 0, 2 ‹**s** 3 = -1, 1 ‹**s** 3 = -2,…,

которую условно можем записать:

…, -2, -1, 0, 1, 2, 3,…,

Числовая ось расширяет область чисел натурального ряда до целых чисел, введением ноля и отрицательных чисел.

Аналогичным образом для операции умножения (*c*=*a* **m** *b*) построим матрицу для ее левой обратной операции ‹**d**. В этой матрице по горизонтали будем откладывать делимое *c*, по вертикали – делитель *b,* а на их пересечениях частные от деления *a*=*c* ‹**d** *b*

ТАБЛИЦА 2

Матрица деления **d**

b \ *c*	1	2	3	4	5
5	$^1/_5$	$^2/_5$	$^3/_5$	$^4/_5$	$^5/_5$
4	$^1/_4$	$^2/_4$	$^3/_4$	$^4/_4$	$^5/_4$
3	$^1/_3$	$^2/_3$	$^3/_3$	$^4/_3$	$^5/_3$
2	$^1/_2$	$^2/_2$	$^3/_2$	$^4/_2$	$^5/_2$
1	$^1/_1$	2	3	4	5

Полученная матрица тоже обладает известной символической симметрией, но действительной симметрии относительно диагонали не имеет. Диагональными элементами матрицы ‹**d** являются единицы, т.к. в соответствии с матрицей **m** любое число *a*, будучи умножено на число *b* в произведении может давать самое себя только при условии *b*=1, (*c*=*a*=*a* **m** *b* при *b*=1). Таким образом,

$$^1/_1 = {}^2/_2 = {}^3/_3 = {}^4/_4 = {}^5/_5 = \ldots = 1$$

Сравнивая также $^2/_2$, $^4/_2$, $^6/_2$ и т.д., которые получаем как *a*=*c* ‹**d** *b,* с элементами матрицы умножения **m** , находим, что $^2/_2$=1, $^4/_2$=2, $^6/_2$=3 и т.д., т.е. получаем известное правило сокращения дробей. Исходя из полученного правила сокращения дробей, например, $^2/_4$ можем представить в виде $^1/_2$, ($^2/_4$= $^1/_2$).

Операция **m** является коммутативной ввиду симметрии матрицы произведения. Поэтому *c* ‹**d** *b* = *c* **d**› *b* , т.е. ‹**d** = **d**›. Следовательно матрица **d**› имеет такой же вид, что и матрица ‹**d**.

Теперь построим матрицу ‹**r** для левой обратной операции к операции возведения в степень (*c*=*a* **e** *b*). По горизонтали будем откладывать степень *c*, по вертикали показатель степени b , а на их пересечении искать в виде так называемого корня основание степени a:

ТАБЛИЦА 3

Матрица корня **‹r**

b					
5	$\sqrt[5]{1}$	$\sqrt[5]{2}$	$\sqrt[5]{3}$	$\sqrt[5]{4}$	$\sqrt[5]{5}$
4	$\sqrt[4]{1}$	$\sqrt[4]{2}$	$\sqrt[4]{3}$	$\sqrt[4]{4}$	$\sqrt[4]{5}$
3	$\sqrt[3]{1}$	$\sqrt[3]{2}$	$\sqrt[3]{3}$	$\sqrt[3]{4}$	$\sqrt[3]{5}$
2	$\sqrt[2]{1}$	$\sqrt[2]{2}$	$\sqrt[2]{3}$	$\sqrt[2]{4}$	$\sqrt[2]{5}$
1	$\sqrt[1]{1}$	$\sqrt[1]{2}$	$\sqrt[1]{3}$	$\sqrt[1]{4}$	$\sqrt[1]{5}$
	1	2	3	4	5 c

По типу построения матрица **‹r** также обладает символической симметрией, но не имеет действительной, числовой симметрии.

Общее выражение для элементов первой строки матрицы таково: $\sqrt[1]{c}=a$. Отсюда из сравнения с элементами матрицы **e** для $a=1$ и $b=1,2,3,4,\ldots$ получаем, что $\sqrt[1]{1}=1$, $\sqrt[1]{2}=2$, $\sqrt[1]{3}=3$, $\sqrt[1]{4}=4$, $\sqrt[1]{5}=5$ и т.д.

Аналогично для элементов первого столбца запишем $\sqrt[b]{1}=a$. Отсюда из сравнения с элементами матрицы **e** для $b=1,2,3,4,5,\ldots$ и $a=1$ имеем:

$\sqrt[1]{1}=1$, $\sqrt[2]{1}=1$, $\sqrt[3]{1}=1$, $\sqrt[4]{1}=1$, $\sqrt[5]{1}=1$ и т.д.

(здесь мы пока опускаем все алгебраические рассмотрения типа $\sqrt[2]{1}=\pm 1$, т.к. это еще не следует из рассматриваемых матриц и специально следует обсудить, видимо, в следующей работе).

Особое внимание следует обратить на элементы диагонали матрицы **‹r**, т.к. это, как мы далее убедимся, «нули» операции **‹r** . Наибольшего значения они достигают при $a=\sqrt[3]{3}$, а затем ассимптотически приближаются к 1.

Матрица **e** не является симметричной. Поэтому возведения в степень операция имеет как левую **‹r**, так и правую **r›** обратные операции.

Символическая симметрия относительно диагонали свойственна и этой матрице (Табл.4), но действительной, числовой симметрии в ней нет. Операцию **r›** принято называть логарифмированием числа c по основанию a, т.е. $b = \log_a c$.

ТАБЛИЦА 4

Матрица логарифма **r›**

b					
5	$\log_5 1$	$\log_5 2$	$\log_5 3$	$\log_5 4$	$\log_5 5$
4	$\log_4 1$	$\log_4 2$	$\log_4 3$	$\log_4 4$	$\log_4 5$
3	$\log_3 1$	$\log_3 2$	$\log_3 3$	$\log_3 4$	$\log_3 5$
2	$\log_2 1$	$\log_2 2$	$\log_2 3$	$\log_2 4$	$\log_2 5$
1	$\log_1 1$	$\log_1 2$	$\log_1 3$	$\log_1 4$	$\log_1 5$
	1	2	3	4	5 c

Как мы увидим далее, числа первого столбца (кроме $\log_1 1$) построенной матрицы – нули, т.е.

$\log_2 1= \log_3 1= \log_4 1= \log_5 1=\ldots=0$, т.к.

$2\ \mathbf{e}\ \log_2 1= 1$, $3\ \mathbf{e}\ \log_3 1=1$, $4\ \mathbf{e}\ \log_4 1= 1$,

$5\ \mathbf{e}\ \log_5 1=1$,

что может быть только при возведении чисел 2,3,4,5 в нулевую степень. Иными словами

$a\ \mathbf{e}\ b=1$ при $b=0$,

что при фиксированном $c=1$ и является элементами первого столбца матрицы **r›**.

Совершенно особой природой обладают числа первой строки матрицы **r›** (за исключением первого ее элемента), т.к.

$1\ \mathbf{e}\ \log_1 2= 2$, $1\ \mathbf{e}\ \log_1 3= 3$, $1\ \mathbf{e}\ \log_1 4= 4$, $1\ \mathbf{e}\ \log_1 5= 5$ и т.д.

Таким образом, это такие числа, мы их в дальнейшем будем называть – псевдочисла, в степени которых единица дает число больше (а учитывая первый элемент строки и равное) единицы.

По диагонали матрицы стоят единицы, т.е.

$\log_1 1 = \log_2 2 = \log_3 3 = \log_4 4 = \log_5 5 = \ldots = 1$, т.к.

$a\ \mathbf{e}\ b=c$ при $c = a$ при условии $b=1$ для любого $a=1,2,3,4,5,\ldots$, т.е. число, возведенное в степень, дает исходное число при условии равенства единице показателя степени.

Теперь обратимся к выведенной ранее [1] операции возведения в ранг **v** и построим для нее обратные левую **‹w** и правую **w›** операции. В начале воспроизведем по [1] матрицу прямой операции $c = a\ \mathbf{v}\ b$ (Табл.5).

Число ξ=4’294’967’296, числа $\alpha, \beta, \gamma, \delta, \varepsilon, \zeta, \xi, \eta >> 1$. Поэтому матрицы обратных операций, заполненные только решениями в натуральных числах, будут сильно разреженными.

ТАБЛИЦА 5

Матрица возведение в ранг **v**

b					
5	1	65536	α	β	γ
4	1	256	δ	ε	ζ
3	1	16	19683	ξ	η
2	1	4	27	256	3125
1	1	2	3	4	5
	1	2	3	4	5 *c*

Левую обратную операцию к возведению в ранг **‹w** по аналогии с операцией **‹r** будем называть извлечением основания $a = c$ **‹w** b :

ТАБЛИЦА 6

Матрица извлечения основания **‹w**

b					
5	1\5	2\5	3\5	4\5	5\5
4	1\4	2\4	3\4	4\4	5\4
3	1\3	2\3	3\3	4\3	5\3
2	1\2	2\2	3\2	4\2	5\2
1	1\1	2\1	3\1	4\1	5\1
	1	2	3	4	5 *c*

Числовой симметрией эта матрица (Табл.6) не обладает. Элементы первой строки – числа натурального ряда 1,2,3,4,5,…, т.к. будучи возведены в первый ранг, т.е. взяты сами по себе (см. Табл.5) в результате дают само же исходное число (как принято говорить, осуществляется тождественное преобразование).

1\1 **v** 1=1, 2\1 **v** 1=2, 3\1 **v** 1=3, 4\1 **v** 1=4,
5\1 **v** 1=5 и т.д.

Итак: 1\1 =1, 2\1=2, 3\1=3, 4\1=4, 5\1=5 и т.д.

Элементы первого столбца матрицы – единицы, т.к. 1\1 **v** 1=1, 1\2 **v** 2 =1, 1\3 **v** 3=1, 1\4 **v** 4=1,
1\5 **v** 5 =1 и т.д., что в соответствии с матрицей операции **v** при фиксированном $c = 1$ требует для всех a равенства единице.

Поэтому 1\1 =1, 1\2 =1, 1\3 =1, 1\4 =1,
1\5 =1 и т.д.

Операция **w›** схожа с рассмотренной операцией логарифмирования **r›**. В дальнейшем операцию **w›** мы будем называть извлечением ранга $b = a$ **w›** c и в специальных случаях обозначать подобно логарифму $b = R_a c$, если a **v** $b = c$.

Матрица извлечения ранга имеет вид:

ТАБЛИЦА 7

Матрица извлечения ранга **w›**

b					
5	$R_5 1$	$R_5 2$	$R_5 3$	$R_5 4$	$R_5 5$
4	$R_4 1$	$R_4 2$	$R_4 3$	$R_4 4$	$R_4 5$
3	$R_3 1$	$R_3 2$	$R_3 3$	$R_3 4$	$R_3 5$
2	$R_2 1$	$R_2 2$	$R_2 3$	$R_2 4$	$R_2 5$
1	$R_1 1$	$R_1 2$	$R_1 3$	$R_1 4$	$R_1 5$
	1	2	3	4	5 *c*

Диагональными элементами этой численно несимметричной матрицы являются единицы, т.к.

a **v** $b = a$ при $b = 1$.

Следует также отметить известное своеобразие природы элементов первой строки, в ранге которых единица порождает ряд натуральных чисел

1 **v** $R_1 c = c$ (c=1,2,3,4,5,…)

и первого столбца, в ранге элементов которого числа натурального ряда образуют единицу

a **v** $R_a 1 = 1$ (a =1,2,3,4,5,…) .

Поскольку в Табл. 6 и 7 построены матрицы обратных операций только для левой свертки возведения в степень [5], то аналогичные две матрицы можно построить для двух обратных операций и ко второй уже правой свертке операции возведения в степень. Т.е. всего для двух сверток операции возведения в степень существует четыре обратных операции и столько же матриц для них.

Рассмотрим обратные операции для предсложения, ($c = a$ **p** b), но прежде воспроизведем матрицу предсложения по работе [1] (см.Табл.8).

Напомним, что элементы в матрице предсложения вычисляются по следующей формуле [1]:

$$c = a \mathbf{p}\, b = \begin{cases} a+1 \text{ при } a>b \\ a+2 \text{ при } a=b \\ b+1 \text{ при } a<b \end{cases}$$

ТАБЛИЦА 8

Матрица предсложения **p**

b					
5	6	6	6	6	7
4	5	5	5	6	6
3	4	4	5	5	6
2	3	4	4	5	6
1	3	3	4	5	6
c	1	2	3	4	5

Теперь построим матрицу для обратной левой операции, назовем ее предвычитанием $a=c$ ‹**q** b. Для конкретности будем работать с левой обратной операцией. Поскольку операция предсложения коммутативна [1], то матрицы для левой и правой обратных операций совпадают. Ниже приведена матрица предвычетания.

ТАБЛИЦА 9

Матрица предвычетания **q**

b						
6	N	N	N	N	N	N
5	N	N	N	N	N	1v2v3v4
4	N	N	N	N	1v2v3	4v5
3	N	N	N	1v2	3v4	5
2	N	N	1	2v3	4	5
1	N	N	1v2	3	4	5
c	1	2	3	4	5	6

Элементы ее таковы.

N – обозначает отсутствие решения.

Запись типа (3v4) означает (3 или 4) и говорит в данном случае о двузначности обратной операции. Многозначные решения (двух-, трех- и более значные) появляются на второй и третьей диагоналях матрицы операции, вправо от главной диагонали. И это вполне понятно для данной прямой операции [1].

Область однозначных решений для матрицы предвычитания представляет собой треугольную область, вправо, начиная с третьей диагонали матрицы данной операции.

Заметим, что операция предвычитание не порождает ни отрицательных чисел, ни даже нуля.

III. ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Матричное представление, развитое в работе [1] для прямых арифметических операций, и последовательно примененное в настоящей работе для обратных арифметических операций позволило:

- построить две матрицы для левой и правой обратных операций для левой свертки операции возведения в степень. Построенные матрицы должны привести к порождению новых типов чисел;
- обнаружить псевдочисла, существование или несуществование которых становится проблемой, требующей разрешения;
- построить матрицу обратной операции предвычетания для самой первой прямой арифметической операции, предсложения (зерации).

БИБЛИОГРАФИЯ

[1] Расплетин Б.К. "Прямые арифметические операции", *Доиздание сборника избранных трудов V Международной научно-практической конференции: учебно-методическое пособие. Под ред. проф. В.А. Сухомлина.* – М.: ИНТУИТ.РУ, 2011. с.91-98.

[2] Рубцов К.А." Алгоритмизация ингредиентов во множестве алгебраических операций" *Кибернетика*, 1989, № 3, с. 111-112.

[3] Каменщиков А.Ф. "Связь матриц прямых арифметических операций", *Доиздание сборника избранных трудов V Международной научно-практической конференции: учебно-методическое пособие. Под ред. проф. В.А. Сухомлина.* – М.: ИНТУИТ.РУ, 2011. с.99-135.

[4] Каменщиков А.Ф., Каменщиков А.А. "Построение и сравнение некоторых высших правых и левых гипероперацций", *III Международная заочная научно-практическая конференция «Научная дискуссия: вопросы физики, математики, информатики»*, Москва 2012, с.29-33.

[5] Каменщиков А.Ф., Каменщиков А.А. "Общие формулы свертки для прямых арифметических операций", *III Международная заочная научно-практическая конференция «Научная дискуссия: вопросы физики, математики, информатики»*, Москва 2012, с.37-44.

Reverse arithmetic operations

Raspletin B.K., Kamenshchikov A.A.

***Abstracs*—In this paper we proposed earlier Raspletin B.K. way to learn a direct arithmetic operations through their representation in the form of matrices distributed on inverse matrix arithmetic operations.**

This allowed studying the matrix inverse operation, simply and clearly show the generation of a variety of known kinds of numbers, rules of operating with non-integer numbers, as well as gain new numerical objects – pseudo-numbers.

The first three matrices built: two for the left and right inverse operations operations for operation of raising to rank (left convolution of operation of exponentiation), and built the exact same reverse operation predvychetaniya matrix for the very first direct operations predslozheniya (zeration).

***Keywords* — direct arithmetic operation, communicativity, noncommunicativity, left and right reverse arithmetic operations, matrix of operation**