О структуре натуральных чисел на базе шести арифметических прогрессий.

Г. Г. Рябов, В. А. Серов

***Аннотация*—В статье на основании представления композиции инфинитарных структур “кратчайших k-мерных путей в n-кубе, глобального k-арного дерева и множества натуральных N” в виде шести бесконечных арифметических прогрессий развивается фундаментальное направление Дирихле о числе простых в арифметических прогрессиях и доказывается теорема о двух прогрессиях из этих шести, содержащих все простые числа. На этой же основе рассматриваются геометрико-топологическая конструкция и индуцированная на ней двумерная нумерация натуральных чисел. Приводятся примеры свойств натуральных, как следствия предложенных конструкций.**

***Ключевые слова*—Бесконечные арифметические прогрессии, условия Дирихле, тернарное глобальное дерево, 3-кортежи, позиции натуральных в кортежах.**

I. Введение

Последние годы отмечены интенсивными исследованиями в области изучения структур простых чисел с позиций числовой комбинаторики [1]-[5]. В данной статье развивается подход, рассматривающий ключевую роль шести бесконечных арифметических прогрессий, покрывающих все натуральные $N(\geq 4)$ без пересечений и индуцирующих общую геометрическую конструкцию натуральных. В частности, доказывается, что две прогрессии из этих шести содержат все простые $P(>4)$. На основе этих двух прогрессий проводится основная идея, которую очень грубо можно сформулировать так: все простые (не близнецы) это, в некотором смысле, не совсем удавшиеся близнецы (которым “помешали” составные в этих двух прогрессиях). Т.е. существует единая структура, как “генетическая программа” получения всех простых (и близнецов и не близнецов), действия на которой основаны на аддитивных свойствах натуральных.

II. Принятые обозначения

N — множество всех натуральных и 0,
$N(\geq 4)$ — множество натуральных, не меньше 4,
P —множество всех простых,
$P(>4)$ —множество простых, больше 4 $\{5,7,11,13,...\}$,
$S_r = \{r+6m\}$ —упорядоченное по возрастанию множество всех натуральных в арифметической прогрессии $r+6m, m \in N$.

III. Отображение натуральных $N(\geq 4)$ на шесть бесконечных арифметических прогрессий.

На основании композиции инфинитарных структур (кратчайших путей в n-кубе, k-арного глобального дерева и множества натуральных N), рассмотренной в [6]-[8] и графически представленной на рис.1, рассмотрим следующие последовательности натуральных, как членов бесконечных арифметических прогрессий в виде полос 6-полосной бесконечной трассы:

Статья получена 3 марта 2016.
Г. Г. Рябов, НИВЦ, Московский государственный университет им. М. В. Ломоносова, Москва, Россия (e-mail: gen-ryabov@yandex.ru).
В. А. Серов, НИВЦ, Московский государственный университет им. М. В. Ломоносова, Москва, Россия.

1-ая полоса: $S_4 = \{4+6m\} = \{4,10,16,22,28,34,40,46,52,58,64,70,76,82,88,94,100,...\}$

2-ая полоса: $S_5 = \{5+6m\} = \{5,11,17,23,29,35,41,47,53,59,65,71,77,83,89,95,101,...\}$

3-я полоса: $S_6 = \{6+6m\} = \{6,12,18,24,30,36,42,48,54,60,66,72,78,84,90,96,102,...\}$

4-ая полоса: $S_7 = \{7+6m\} = \{7,13,19,25,31,37,43,49,55,61,67,73,79,85,91,97,103,...\}$

5-ая полоса: $S_8 = \{8+6m\} = \{8,14,20,26,32,38,44,50,56,62,68,74,80,86,92,98,104,...\}$

6-ая полоса: $S_9 = \{9+6m\} = \{9,15,21,27,33,39,45,51,57,63,69,75,81,87,93,99,105,...\}$

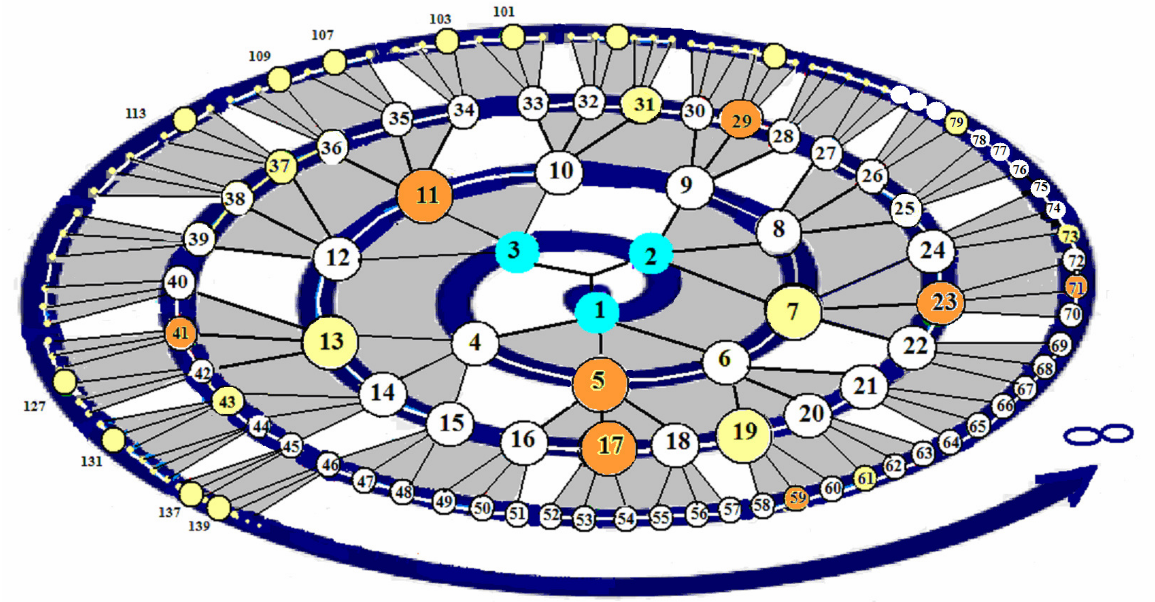


Рис.1 Глобальное тернарное дерево с нумерацией вершин, индуцированной отображенными в эти вершины троичными матрицами — биекциями кратчайших 3-путей в n-кубе между антиподальными вершинами. Спаренные 3-кортежи глобального тернарного дерева и спирали натуральных:
$[<4,5,6><7,8,9>]$, $[<10,11,12><13,14,15>]$, $[<16,17,18><19,20,21>]$, $[<22,23,24><25,26,27>]$, $[<28,29,30><31,32,33>]$, $[<34,35,36><37,38,39>]$,....

Из приведенного представления очевидно:

$$S_4 \cup S_5 \cup S_6 \cup S_7 \cup S_8 \cup S_9 = N(\geq 4) \qquad (1)$$

Из соотношения: $P(>4) \subseteq N(\geq 4)$, и следующих свойств S_4, S_6, S_8 и S_9:

$P(>4) \cap S_4 = \varnothing$ (S_4-четные), $P(>4) \cap S_6 = \varnothing$ (S_6-четные), $P(>4) \cap S_8 = \varnothing$ (S_8-четные),

$P(>4) \cap S_9 = \varnothing$ (S_9-делящиеся на 3),

имеем:

$N(\geq 4) \setminus \cup(S_4, S_6, S_8, S_9) = S_5 \cup S_7 \supseteq P(>4)$.

Или, более компактно:

$$S_5 \cup S_7 \supseteq P(>4) \qquad (2)$$

Таким образом, доказана

Теорема: ***все*** *простые числа, больше 4 принадлежат* ***двум*** *бесконечным арифметическим прогрессиям:* $S_5 = \{5+6m\}$ *и* $S_7 = \{7+6m\}$, $m \in N$. *При этом,* $S_5 \cap S_7 = \varnothing$, S_5 *и* S_7 *удовлетворяют условиям Дирихле:* $(5,6)=1$, $(7,6)=1$ *(т.е. 5 и 6—взаимно просты, 7 и 6—взаимно просты).*

Каждому члену этих прогрессий поставим в соответствие номер (5 или 7) прогрессии и его порядковый номер в прогрессии m.

В этих прогрессиях помимо простых содержатся и составные числа. Приведем вид этих множеств на начальном участке (простые отмечены более толстым шрифтом и подчеркиванием, составные—курсивом). Простые-близнецы (помеченные символом T) имеют один номер m, но всегда принадлежат: меньший — к S_5 и больший на два — к S_7:

$m =$	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	
$S_5 =$	{**5**,	**11**,	**17**,	**23**,	**29**,	35,	**41**,	**47**,	**53**,	**59**,	65,	**71**,	77,	**83**,	**89**,	95,	**101**,	**107**,	...}
$S_7 =$	{**7**,	**13**,	**19**,	25,	**31**,	**37**,	**43**,	49,	55,	**61**,	**67**,	**73**,	**79**,	85,	91,	**97**,	**103**,	**109**,	...}
	T	**T**	**T**		**T**		**T**			**T**		**T**					**T**	**T**	

На основании свойств композиции предлагается следующий аддитивный метод последовательного вычисления составных в S_5 и S_7, как вариант решета. Для каждого простого $p \in S_5$ рассматривается его последовательное сложение с $4p$ (результат принадлежит S_7), а затем с $2p$ (результат в S_5) и т.д. $+4p, +2p, +4p, +2p, \ldots$ Все числа в этой последовательности—составные.

Аналогично с простыми из S_7, для которых последовательные сложения $+4p$, $+2p$, будут чередовать составные из S_7, S_5, $S_7, S_5, \ldots$(рис. 2).

Столь тесная связь (переплетение) этих прогрессий позволяет рассматривать их как единое образование (“бипрогрессию”) с двумя начальными простыми-близнецами (5 и 7).

Она напоминает спираль ДНК Крика-Уотсона, но связующими элементами являются простые числа-близнецы.

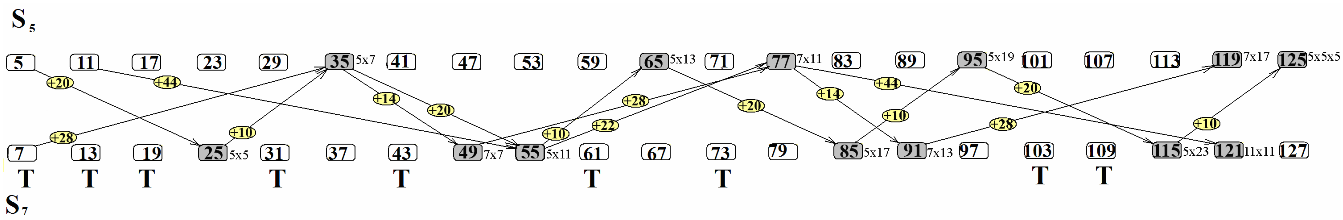


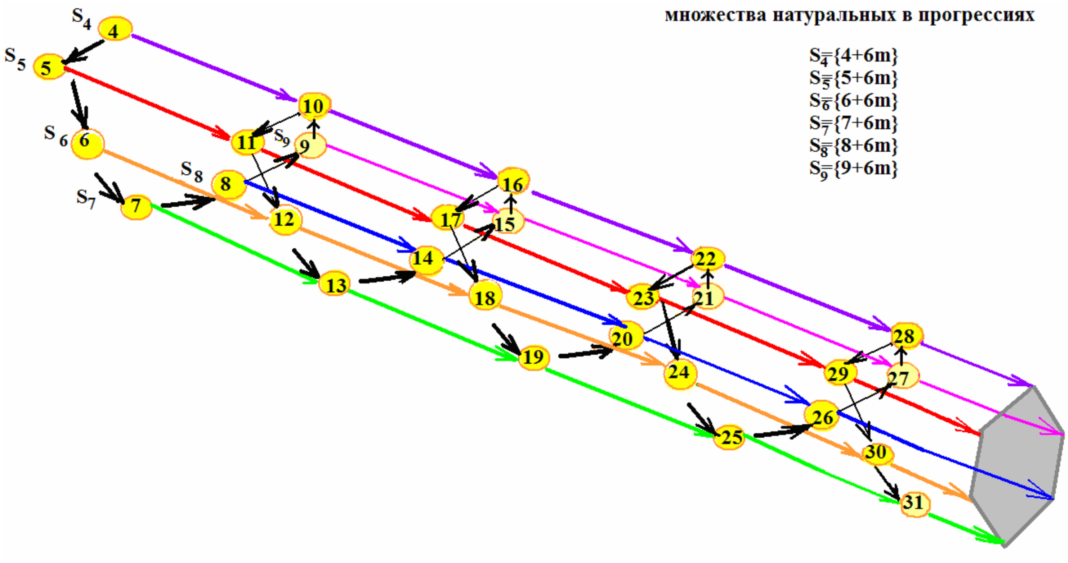
Рис.2 В S_5 и S_7 простые показаны на белом фоне, составные на сером фоне (рядом с ними—их разложения на простые сомножители). В овалах значения $4p$ и $2p$ для соответствующих простых p. Эти значения показаны только для $p = 5(20,10); 7(28,14); 11(44,22)$.

Несколько простейших следствий из двумерной классификации для простых:

1. Простое $p \in S_5$ и имеющее в десятичной системе концевую справа цифру 3 не может быть простым-близнецом. Аналогично, $p \in S_7$ с концевой цифрой 7 не может быть простым-близнецом.

2. Места в S_5 и S_7, запретные для простых близнецов—следующие за числами с концевыми 9 и т.п.

Теперь перейдем к еще одному представлению N, в основе которого лежит отображение упорядоченных по возрастанию множеств чисел - членов арифметических прогрессий $S_4 \div S_9$ в вершины, лежащие на ребрах бесконечной шестигранной призмы и винтовой спирали, натянутой на эту призму с шагом 6 (рис. 3). Плоская развертка этого представления есть представление (1).



$S_4=\{4+6m\}$	4	10	16	22	28	34	40	46	52	58	64	70	76	82	88	94	100	106	...
$S_5=\{5+6m\}$	5	11	17	23	29	35	41	47	53	59	65	71	77	83	89	95	101	107	...
$S_6=\{6+6m\}$	6	12	18	24	30	36	42	48	54	60	66	72	78	84	90	96	102	108	...
$S_7=\{7+6m\}$	7	13	19	25	31	37	43	49	55	61	67	73	79	85	91	97	103	109	...
$S_8=\{8+6m\}$	8	14	20	26	32	38	44	50	56	62	68	74	80	86	92	98	104	110	...
$S_9=\{9+6m\}$	9	15	21	27	33	39	45	51	57	63	69	75	81	87	93	99	105	111	...

Рис.3 Арифметическая топология натуральных чисел как вершин винтовой спирали на поверхности шестигранной бесконечной призмы. Множества натуральных в прогрессиях отображены на вершины вдоль ребер призмы. Все простые числа содержатся среди вершин, соответствующих прогрессиям S_5 и S_7.

Можно дать и другую интерпретацию винтовой структуре натуральных на шестигранной призме, отобразив каждое натуральное в параллелограмм со сторонами 1 и $\sqrt{37}/6$ и углом $\alpha = \pi/2 + arctg(1/6)$, и замостив грани призмы этими параллелограммами, которые образуют кусочно-плоскую винтовую структуру (рис. 4).

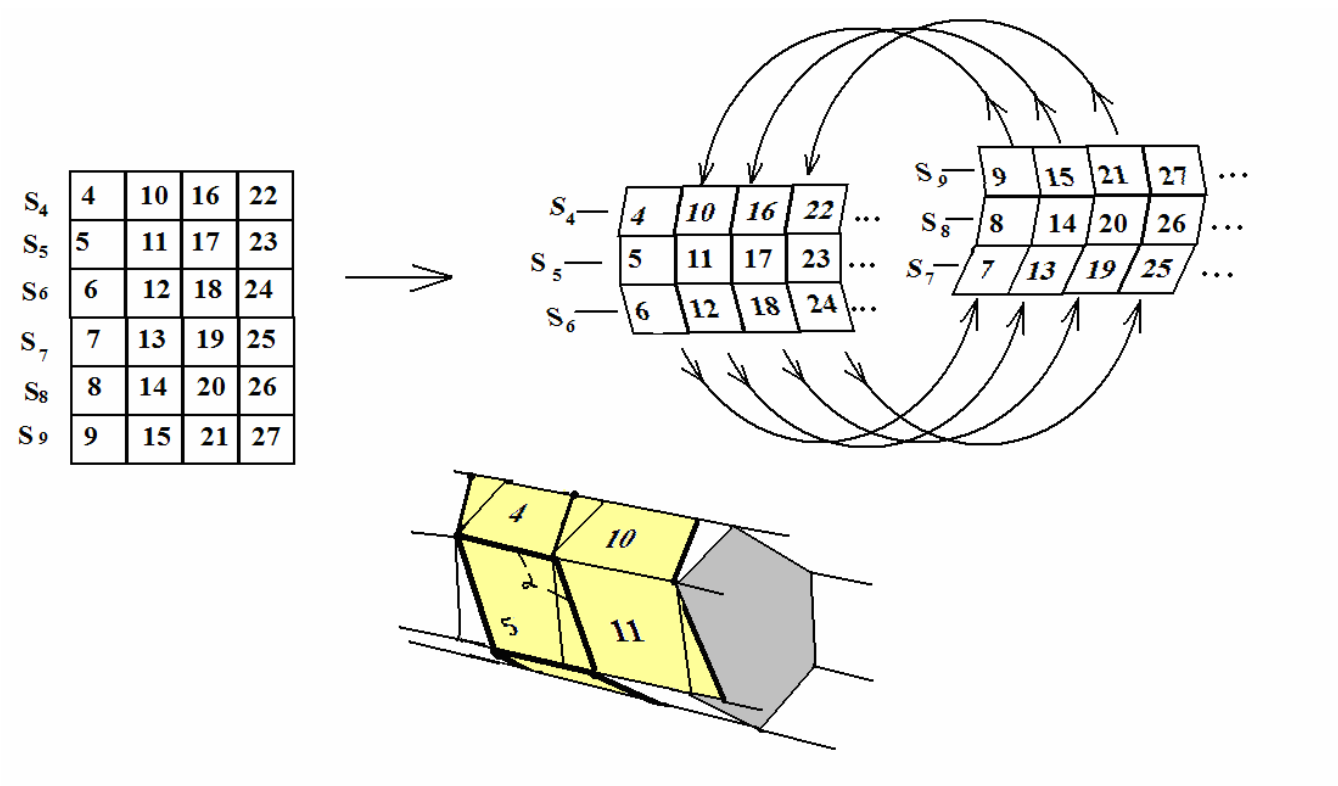


Рис. 4 Укладка параллелограммами граней бесконечной шестигранной призмы в соответствии с прогрессиями $S_4 \div S_9$.

IV. Заключение.

Свойства, следующие из двумерной нумерации натуральных (r—номер прогрессии ($S_4 \div S_9$) и m—порядковый номер числа в прогрессии), а также связей между шестью прогрессиями, как элементами групповой структуры, требуют более расширенного дальнейшего рассмотрения. Работа поддержана грантом РФФИ (проект 16-07-01071).

Библиография

[1] Wei Sheng Zeng, Ziqi Sun, "A Simple Method for searching for Prime Pairs in the Goldbach Conjecture," arXiv:1505.01185 [math.GM], 4 May 2015. Available: http://arxiv.org/pdf/1505.01185v1

[2] Yoichi Motohashi, "The twin prime conjecture," arXiv:1401.6614v2 [math.NT], 16 Mar 2014. Available: http://arxiv.org/pdf/1401.6614v2

[3] D.H.J. Polymath, "New equidistribution estimates of Zhang type," arXiv:1402.0811v3 [math.NT], 3 Sep 2014. Available: http://arxiv.org/pdf/1402.0811v3

[4] Kevin Ford, Ben Green, Sergei Konyagin, James Maynard, Terence Tao, "Long gaps between primes," arXiv:1412.5029v2 [math.NT], 6 Apr 2015. Available: http://arxiv.org/pdf/1412.5029v2

[5] Janos Pintz, "Patterns of primes in arithmetic progressions," arXiv:1509.01564v2 [math.NT], 7 Sep 2015. Available: http://arxiv.org/pdf/1509.01564v2

[6] G. G. Ryabov, V. A. Serov, “On classification of k-dimension paths in n-cube,” Applied Mathematics, 2014, vol. 5, no. 4, pp. 723-727. Available: http://dx.doi.org/10.4236/am.2014.54069

[7] G.G. Ryabov, V.A. Serov, "Polymorphism of symbolic ternary matrices and genetic space of the shortest k-paths in the n-cube," International Journal of Open Information Technologies, 2015, vol. 3, no. 7, pp. 1-11. Available: http://injoit.org/index.php/j1/article/view/214/173

[8] Г. Г. Рябов, В. А. Серов, “Композиция инфинитарных структур,” Вычислительные методы и программирование. 2015. Т. 16, №2. с.557-565. Электронный ресурс: http://num-meth.srcc.msu.ru/zhurnal/tom_2015/pdf/v16r452.pdf

On natural numbers structure on the basis of six arithmetical progressions.

G. G. Ryabov, V. A. Serov

***Abstract*—In the article the fundamental direction of Dirichlet about the number of primes in arithmetical progressions on the basis of infinitary structures composition ("k-dimensional shortest paths in n-cube, global k-ary tree and the set of natural numbers") representation in the form of six infinite arithmetic progressions is developed.**

The theorem on two progressions from these six containing all prime numbers is proved.

The geometric-topological construction and the two-dimensional numbering of natural numbers induced on it are considered on the same basis.

Examples of natural numbers properties as consequences of the offered constructions are given.

***Keywords*—Infinite arithmetical progression, Dirichlet condition, ternary global tree, 3-tuples, natural number positions in tuples.**