ДОСТОВЕРНАЯ ФИЛЬТРАЦИЯ В «БЕЛОМ ШУМЕ»

А.В.Павлов

Аннотация-- **Даны результаты измерений суммы полезного сигнала и математического «белого шума» в дискретном множестве точек фиксированного отрезка времени. Доказано, что среднеквадратическая ошибка оценки полезного сигнала стремится к нулю при стремлении к бесконечности полосы пропускания частот физического белого шума. Приводится явный вид оценки полезного сигнала с ошибкой стремящейся к нулю без применения спектральных плотностей.**

Данная оценка одновременно оценивает спектр полезного сигнала.

Ключевые слова—**произвольные процессы, оптимальная линейная фильтрация, Белый шум, среднеквадратическая ошибка стремится к нулю.**

Введение

Рассмотрим одну из классических задач теории фильтрации, когда измеряемый сигнал нестационарен. Предполагаем, что даны результаты измерений значений случайной траектории ξ(t) при $t \in [0,T]$ в точках

$$0 < t_0 < t_1 < \ldots < t_n = T,$$

(по поводу выбора таких точек см. следствие 1 к теореме 1),

через θ(t) обозначен полезный «сигнал», который надо оценить, а через η(t) – шум, причем:

$\xi(t)=\theta(t)+\eta(t),\ t \in [0,T]$.

Про «помеху» η(t) известно, что она близка к «белому шуму» не обязательно с постоянной мощностью или является электромагнитным импульсом очень высокой частоты; предполагается, что $M\eta(t)=0$.

В этом случае, после точной математической формулировки, доказано, что ошибка оптимальной линейной фильтрации стремится к нулю, причем приводится явный вид оценки $\hat{q}(t)$ полезного сигнала θ(t), применение которой имеет среднеквадратическую ошибку равномерно по всем t стремящуюся к нулю:

$$\sup_t M \,|\, \hat{q}(t) - q(t) \,|^2 \to 0,$$

при $\Delta = \max_k (t_k - t_{k-1}) \to 0.$

Поскольку оценка основывается на предварительной оценке спектральных разложений (не спектральных плотностей), то одновременно оценивается спектр сигнала (теорема 1,[4,5]). (По поводу ее оптимальности см. следствие 2 к теореме 1).

Приведем математическую постановку.

В теореме 1 мы будем предполагать, что значения помехи в точках измерения

$$0 < t_0 < t_1 < \ldots < t_n = T = const.,$$

суть некоррелированные с.в. $h(t_j),\ j = 1,\ldots n$.

$$M(h(t_k) - M\,h(t_k))(h(t_l) - M\,h(t_l)) = 0, k \neq l.$$

k,l=0…n, причем $M\ h(t_j) = 0,\ j = 0, 1,\ldots n$.

Дисперсии $D\eta(t_j)=\sigma^2(t_j)$, таковы, что

$$0<\sigma^2= \max_{0<j<n} \sigma^2(t_j)<\infty$$

С точки зрения физической постановки данные условия (условия теоремы 1) выполняются если, во-первых, случайный процесс является стационарным процессом, который часто называют физическим «белым шумом»[2], то есть процесс, спектральная плотность которого постоянна на интервале -W<t<W, W >> 1 и равна нулю в остальных случаях.

Условия выполняются также в аналогичных ситуациях, если спектральная плотность «белого шума» не однородна и равна некоторой функции G(x)>0 при -W<x<W, и нулю в остальных случаях.

Во-вторых, для случая когда η(t) – электромагнитный импульс столь высокой частоты, что результаты измерений даже в достаточно близких точках практически некоррелированы (или независимы). Это бывает в тех случаях, когда между этими точками укладывается столь большое количество разно-знаковых значений «шума», что результаты измерений могут попасть на любые положительные или отрицательные значения траектории, практически независимо от выбора точек разбиения.

Под ошибкой оптимальной линейной фильтрации в теореме 1 мы понимаем равномерный минимум в среднеквадратическом смысле

$$m = \max_{t\in[0,T]} \min_{\{t_k\}} \min_{\{C_k(t)\}} M\_0,$$

$$M\_0 = M\left(\sum_{k=1}^{n} C_k(t)\xi(t_k)-\theta(t)\right)^2,$$

здесь второй минимум берется по произвольным наборам $0 = t_0 = t_1 < \ldots t_n = T, n = 1,2,\ldots$.

The article received Jun 18, 2015. Prof. A.V. Pavlov is with MIREA (email: login11@ umail.ru).

При каждом фиксированном t и определенном наборе $0 = t_0 < t_1 < \ldots t_n = T$, теоретически существуют коэффициенты $\{C_k^*(t)$, к=0,1…n$\}$ [3], обеспечивающие достижения этого минимума:

$$m = \max_{t\in[0,T]} m(t), \ m(t) =$$

$$= \min_{\{C_k(t)\}} M\left(\sum_{k=1}^{n} C_k(t)\xi(t_k) - \theta(t)\right)^2 =$$

$$= M\left(\sum_{k=1}^{n} C^*{}_k(t)\xi(t_k) - \theta(t)\right)^2 .$$

В теореме 1 мы не находим эти коэффициенты в явной форме, но приводим явную оценку, из которой следует вид асимптотически оптимальных при n ® Г коэффициентов.

I. Основной результат.

Теорема 1.

Если $M\eta(t_j)=0$, j=0…n, $M\eta(t_j)\,\eta(t_i)=0$, при всех $t_j \neq t_i$; i,j =0…n.

Если $\theta(t)$ непрерывно дифференцируемая неслучайная функция при всех

$$t\in[0..T], \ \max_{t\in[0...T]} \theta'(t) = C = const. < \infty$$

То

1)

$$m \to 0, \Delta = \max_{1\le j\le n} \left|t_j - t_{j=1}\right| \to 0,$$

2) Конкретный вид асимптотически оптимальной оценки следует из равенств

$$\hat{\theta}(t) = \frac{\hat{a}(0)}{2} + \sum_{r=1}^{N(n)} \hat{a}(r)\cos(\frac{t\pi r}{T}),$$

$$\hat{a}(0) = \frac{1}{\pi}\sum_{k=1}^{n} \xi(t_k)(t_k - t_{k-1}),$$

$$\hat{a}(r) = \frac{2}{\pi}\sum_{k=1}^{n} \cos(\frac{t_k \pi r}{T})\xi(t_k)(t_k - t_{k-1}),$$

$$r = 1 \ldots N(n),$$

и для данной оценки имеет место соотношение

$$m \le \sup_{t\in[0,T]} M(\hat{\theta}(t) - \theta(t))^2 \to 0,$$

$$\text{åñëè} \quad \Delta \to 0, \ N^2(n)\Delta \to 0.$$

Доказательство.

Пусть

$$\theta(\frac{T}{\pi}S), \ S \in [0,\pi], \ S = \frac{t\pi}{T},$$

$$\xi(\frac{T}{\pi}S) = \theta(\frac{T}{\pi}S) + \eta(\frac{T}{\pi}S).$$

Разложение продолженной на $[-p, 0)$ четной функции $\theta(\frac{T}{\pi}S)$ имеет вид

$$\theta(\frac{T}{\pi}S) = \frac{a(0)}{2} + \sum_{m=1}^{\infty} a(r)\cos(rS), S\in[0,\pi],$$

$$a(r) = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} (\cos(Sr))\theta(\frac{T}{\pi}S)ds \ , r = 0, 1 \ldots .$$

Оценим сначала a(r). Используя приближение интеграла его интегральными суммами, определим оценку a(r) следующим образом

$$\hat{a}(r) = \frac{2}{\pi}\sum_{k=1}^{n} \cos(\frac{t_k\pi}{T}r)\xi(t_k)(t_k - t_{k-1})\frac{\pi}{T} =$$

$$= \frac{2}{\pi}\sum_{k=1}^{n} \cos(\frac{t_k\pi}{T}r)\theta(t_k)(t_k - t_{k-1})\frac{\pi}{T} +$$

:

$$+ \frac{2}{\pi}\sum_{k=1}^{n} \cos(\frac{t_k\pi}{T}r)\xi(t_k)(t_k - t_{k-1})\frac{\pi}{T} +$$

$$+ \frac{2}{\pi}\sum_{k=1}^{n} \cos(\frac{t_k\pi}{T}r)\eta(t_k)(t_k - t_{k-1})\frac{\pi}{T}.$$

$$\hat{a}(0) = \frac{2}{\pi}\sum_{k=1}^{n} \frac{\pi}{T}\xi(t_k)(t_k - t_{k-1}) =$$

$$= \frac{2}{\pi}\sum_{k=1}^{n} \theta(t_k)\frac{\pi}{T}(t_k - t_{k-1}) + \frac{2}{\pi}\sum_{k=1}^{n} \eta(t_k)\frac{\pi}{T}(t_k - t_{k-1}).$$

По определению

$$D = \max_k (t_k - t_{k-1}),$$

$$W(N(n)) = \sum_{r=N(n)+1}^{\Gamma} a(r)\cos(rt).$$

Применяя традиционные оценки разности между интегралом и интегральной суммой [4], и используя то, что для некоррелированных величин с нулевым математическим ожиданием

$$M\left(\sum_{k=0}^{n} s_k h(t_k)\right)^2 = \sum_{k=0}^{n} s_k^2 M\, h(t_k)^2,$$

$$s_k = \sum_{r=0}^{N((n))} \cos\left(t_k p r / T\right)\left(t_k - t_{k-1}\right),$$

имеем

$$M[\hat{\theta}(t)-\theta(t)]^2 =$$

$$=[(2/\pi)\sum_{r=1}^{N(n)}[\sum_{k=1}^{n}(\cos\frac{t_k\pi}{T})\theta(t_k)(t_k-t_{k-1})-$$

$$-(2/\pi)\int_0^{\pi}\cos rs\ \ \theta(\frac{Ts}{\pi})\ \ ds\ \ ]\cos rt+\frac{\hat{a}(0)-a(0)}{2}+$$

$$+\sum_{r=1}^{N(n)}\ \sum_{k=1}^{n}\eta(t_k)[\cos\frac{t_k\pi}{T}r](t_k-t_{k-1})-\Omega(N(n))]^2\le$$

$$\le G[(N(n)+1)^2\Delta^2\max_{S,r}(\cos rS\theta(\frac{T}{\pi}S))'+$$

$$+\max\Omega(N(n))]^2+$$

$$+\sum_{k=1}^{n}D\eta(t_k)(t_k-t_{k-1})^2\left(\sum_{r=0}^{N(n)}\cos rt_k\cos\frac{t_k\pi}{T}m\right)^2\le$$

$$\le[C_1(1+o(1))N^2(n)\Delta^2+\max\Omega(N(n))]^2+$$

$$T\Delta\left(\max_{0\le k\le n}(D\eta(t_k))\right)(N(n)+1)^2=$$

$$=\delta(n)\to 0,$$

при $N^2(n)\Delta \to 0.$

Мы воспользовались тем, что остаток ряда непрерывных на отрезке функций $\Omega(N(n))$, сходящийся к непрерывной функции, сходится к ней равномерно.

Часть 2) теоремы доказана.

Из определения оптимальной линейной оценки θ(t), [1], и того, что при любом фиксированном t оценка $\theta(t)$ является линейной относительно коэффициентов {ξ(t_k), k=0…n} оценкой , следует, что оптимальная оценка $\hat{\theta}_*(t)$ имеет ошибку меньшую чем только что оцененная величина :

$$M(\hat{\theta}_*(t)-\theta(t))^2\le M(\hat{\theta}(t)-\theta(t))^2\le\delta(n)\to 0,$$

где δ(n) не зависит от t .

Следствие 1.

Если спектральная плотность стационарного шума имеет вид:

$$f(t)=\begin{cases}G,\ t\in[-\Omega,\Omega]\\ 0,\ t\in[-\Omega,\Omega]\end{cases}$$

то из оценки теоремы следует, что минимальная среднеквадратическая ошибка $m \to 0$, при условии, что точки в оценке теоремы выбраны так, что

$$\frac{\sin\Omega t_k}{t_k}=0, M\eta^2(t_k)=G\Omega<n^{\delta},$$

$$k=0,1,...,n, G=G(n)\to c=const.>0,$$

$$\Omega=\Omega(n)\to\infty, 0<\delta<1,$$

$$n=\tilde{n}*\Omega(1+o(1)), c*=const.,$$

$$\Delta^{1-\delta}(n)N^2(n)\to 0,\ \ n\to\infty.$$

(Заметим, что из доказательства теоремы следует стремление к нулю среднеквадратической ошибки оценки подобной оценке нашей теоремы ,в которой все значения измеряемой траектории, большие по модулю некоторого числового значения $R = n^e, 0 < e < 1/2$, заменяются на это R. В этом случае, впрочем, оценка перестает быть линейной и точная формулировка упомянутого факта выходит за рамки данной статьи ([6-8]).

Следствие 2.

Если известны все Mξ(t_k)ξ(t_j) Mξ(t_k)η(t_j) , k,j=1…n, то существуют оценки более оптимальные чем оценка $\hat{q}(t)$.В этом случае эти оценки находятся традиционными методами нахождения оптимальных проекций θ(t) на набор «векторов – случайных величин» ξ(t_0)…ξ(t_n) (См. например [1]). Однако оценка теоремы 1 как и оптимальная линейная оценка имеет ошибку стремящуюся к нулю при $n \to \infty, \Delta \to 0$, но при ее построении мы не использовали наборы чисел

{ Mξ(t_k)η(t_j)} и { Mξ(t_k)ξ(t_j) },

которые, в свою очередь, надо каким-то образом специально оценивать, причем в реальных задачах с заметной ошибкой.

Библиография

[1] Павлов А.В. Случайные ряды Фурье и их применение к теории фильтрации-прогноза. М.:Изд-во МГУ им.М.В.Ломоносова,механ.-математ.ф-т. 2000. ISBN 5-93839-002-8. -64 с.

[2] М..Х.Ф.Дэвис. Линейное оценивание и стохастическое управление.М.: Наука. 1984. –208 с.

[3] С.Ватанабэ,Н.Икэда. Стохастические дифференциальные уравнения и диффузионные процессы. М.: Наука.1986. –448 с.

[4] Н.С.Бахвалов,Н.П.Жидков,Г.М.Кобельков.Численные методы. М.: Наука. 1987.600 с.

[5] .А.В.Павлов. Теорема типа больших уклонений для критерия хи-квадрат. -М.:Успехи мат.наук. 1996,Т.51, 1(307), с.159-161.

[6] А.В.Павлов. Достоверное прогнозирование функций,представимых в виде преобразований Лапласа или Фурье. М.: Вестник МГТУ МИРЭА.Эл.Фс. 77-57811 № 180414, 2014, 3, 2(июнь). с.78-85.

[7] Pavlov A.V. Prediction and filtering of random sequences with time-dependent expectation.Moscow.Sc.Bulletin of MIREA. 2012, № 1(12),p.38-48.

[8] Павлов А. В. Разложения типа Вольда и линейное оценивание для нестационарных процессов //International Journal of Open Information Technologies. – 2015. – Т. 3. – №. 7. - С. 12-18.

.

On reliable filtration in “white noise”

Andrey Pavlov V.

Abstract— **The results of measuring of a sum of useful signal and mathematical «white noise» in the discrete set of points for the fixed interval of time are given. It is proved, that in limit the linear error of filtering is approached to the zero at a growth of width of the spectrum of the physical “white noise “to infinity. A concrete estimation with such minimum error is considered. The estimation is considered without the use of spectral density.**

The spectrum of a signal is estimated too.

Keywords — **not-stationary processes, optimum linear filtration, White noise, reliable filtration**