

Об особенностях оценок показателя Херста фрактального броуновского движения

С.В. Поршневу, Э.В. Соломаха

Аннотация—Проведено исследование статистических характеристик выборок, ансамблей оценок показателей Херста $\{\bar{H}_k\}_m = F(\{x_i(H_k)\}_m)$, где $F(\cdot)$ – алгоритм вычисления оценок показателей Херста $\{\bar{H}_k\}_m$, $i = \overline{1, 2^{12}}$ – номер координаты m -ой независимой реализации $\{x_i(H_k)\}_m$, генерируемой в соответствии с алгоритмом Фурье-фильтрации для $\{H_k\} = \{0.2, 0.3, \dots, 0.9\}$, $k = \overline{1, 8}$ – множество «точных» значений показателей Херста, $m = \overline{1, 10^2}$ – порядковый номер независимой реализации ФДБ, вычисленных с помощью метода наименьших квадратов в предположении, что спектральная плотность мощности ФДБ $\{S_x[k, n]\}_m \propto 1/(n/\max(i))^{\beta_{m,k}}$, где $n = \overline{0, \max(i) - 1}$, $\beta_{k,m} = 2\bar{H}_{k,m} + 1$. Анализ полученных результатов показал:

1) ансамбли оценок показателей Херста $\{\bar{H}_{k,m}\}$ являются выборками случайных чисел с ограниченными областями рассеяния $[H_k - 0.05; H_k + 0.05]$;

2) $\arg \max_{\xi} p_{RP}(\{\bar{H}_{k,m}\}, \xi) = \{H_k\}$, где $p_{RP}(\{\bar{H}_{k,m}\}, \xi)$ – аппроксимации Розенблатта-Парзена плотностей распределений выборки $\{\bar{H}_{k,m}\}$ с нормальным ядром;

3) Зависимость $H_k = f(\bar{H}_k)$ описывается ступенчатой функцией:

$$\text{Step}(x) = \begin{cases} 0.2, & 0.15 < x \leq 0.25, \\ 0.3, & 0.25 < x \leq 0.35, \\ \vdots & \\ 0.9, & 0.85 < x \leq 0.95; \end{cases}$$

4) Установить взаимно однозначное соответствие между оценкой $\bar{H}_{k_1}$, вычисленной по единственной реализации ФДБ, и «точным» значением H_k , использованным для ее генерации, оказывается возможным только между номером ступеньки и точным значением H_k , изменяющимся с шагом $\Delta H = 0.1$, поэтому можно говорить, что $H_{k_1} \neq H_{k_2}$, когда $|\bar{H}_k^{(1)} - \bar{H}_k^{(2)}| > 0.1$.

5) Для вычисления оценок показателя Херста $\bar{H}_k$ ФДБ

$x_i(H_k)$, значения которых будет соответствовать «точному» значению H_k , использованному для ее генерации, необходимо использовать ансамбль независимых реализаций ФДБ $\{x_i(H_k)\}_m$, для каждой из которых, априори, есть основания полагать, что соответствующие «точные» значения их показателей Херста H_k являются одинаковыми.

Ключевые слова—показатель Херста, фрактальное броуновское движение (ФДБ), алгоритм Фурье-фильтрации, спектральная плотность мощности ФДБ

1. ВВЕДЕНИЕ

Систематические исследования самоподобных случайных процессов (фрактального броуновского движения (ФБД)), были начаты Б. Мандельбротом [1], который отметил, что, в неявном виде ФБД, по-видимому, впервые было рассмотрено А.Н. Колмогоровым в 1940 г. [2].

Напомним, следуя [3], основные определения теории гауссовых случайных процессов (одномерного броуновского движения (БД)) и ФБД.

1) Случайная величина x называется гауссовой или нормальной с математическим ожиданием μ и дисперсией σ^2 , если она распределена по закону:

$$F_x(X) = P(x \leq X) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma}} \int_{-\infty}^X \exp\left(-\frac{1}{2}\left(\frac{\xi - \mu}{\sigma}\right)^2\right) d\xi,$$

где $P(x \leq X)$ – вероятность того, что значение измеренной случайной величины x удовлетворяет условию $x \leq X$.

2) Случайный процесс $x(t)$ называется гауссовским, если для каждого конечного набора моментов времени $\{t_i\}, i = \overline{1, N}$ временной ряд (БР) $\{x(t_i)\}$, составленный из его значений имеет нормальное распределение $N(0, \sigma)$.

3) Одномерным БД называется гауссовский (или винеровский) процесс $x(t)$ на интервале $[a; b]$, обладающий следующими свойствами:

3.1 $x(0) = 0$ и функция $x(t)$ почти всегда непрерывна;

3.2. случайная величина $\Delta x(|t_{k_2} - t_{k_1}|) = |x(t_{k_2}) - x(t_{k_1})|$,

где $k_1, k_2 \in [1, N]$, $k_1 \neq k_2$, принадлежит генеральной совокупности, имеющей нормальное распределение $N(0, \sigma_0(t_{k_2} - t_{k_1})), \sigma_0 = \text{const}$, то есть:

Статья получена 10 мая 2025 г.

С.В. Поршневу, Уральский Федеральный Университет им. Первого Президента России Б.Н. Ельцина, Екатеринбург, Российская Федерация (e-mail: s.v.porshnev@urfu.ru).

Э.В. Соломаха, Уральский Федеральный Университет им. Первого Президента России Б.Н. Ельцина, Екатеринбург, Российская Федерация (e-mail: eduard.solomakha@urfu.ru)

$$F_{\Delta x(t_{k_2}-t_{k_1})}(\Delta X) = P(\Delta x(t_{k_2}-t_{k_1}) < \Delta X) = \\ = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma_0^2|t_{k_2}-t_{k_1}|}} \int_{-\infty}^{\Delta X} \exp\left(-\frac{1}{2}\left(\frac{\xi}{\sigma_0\sqrt{|t_{k_2}-t_{k_1}|}}\right)^2\right) d\xi;$$

3.3. дисперсия приращений БД подчиняется закону:

$$D[x(t_{k_2}) - x(t_{k_1})] = \\ = E\left[\left(x(t_{k_2}) - x(t_{k_1})\right)^2\right] = \sigma_0^2 |t_{k_2} - t_{k_1}|.$$

4) ФБД с параметром $0 < H < 1$ (показатель Херста) называется процесс $x_H(t)$, обладающий следующими свойствами:

4.1. $x_H(0) = 0$ и функция $x_H(t)$, почти всегда непрерывна;

4.2. случайная величина $\Delta x(|t_{k_2} - t_{k_1}|)$ принадлежит генеральной совокупности, имеющей нормальное распределение $N(0, \sigma_0(t_{k_2} - t_{k_1})^H)$, $\sigma_0 = \text{const}$, то есть:

$$F_{\Delta x(|t_{k_2}-t_{k_1}|)}(\Delta X) = P(\Delta x(|t_{k_2}-t_{k_1}|) < \Delta X) = \\ = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma_0|t_{k_2}-t_{k_1}|^H} \int_{-\infty}^{\Delta X} \exp\left(-\frac{1}{2}\left(\frac{\xi}{\sigma_0|t_{k_2}-t_{k_1}|^H}\right)^2\right) d\xi.$$

Из 3.1–3.3, 4.1–4.2 следует:

– при $H = 1/2$ ФБД совпадает с БД, $x_{H=0.5}(t) \equiv x(t)$;

– дисперсия приращений ФБД подчиняется закону:

$$D[x_H(t_{k_2}) - x_H(t_{k_1})] = \\ = E\left[\left(x_H(t_{k_2}) - x_H(t_{k_1})\right)^2\right] = \sigma_0^2 |t_{k_2} - t_{k_1}|^{2H}.$$

Описанные выше понятия одномерных БД и ФБД широко используются в качестве математических моделей ВР, составленных из значений выбранных количественных показателей, используемых для характеристики состояния изучаемых динамических систем различной природы (физических, технических, экономических, биологических и т.д.), которые, как полагается, определены либо в узлах временной сетки (ВС)

$$t_i = t_0 + \Delta t \cdot i, i = \overline{1, N}, \Delta t = \text{const}, \quad (1)$$

либо измерены «по их изменению», т.е. при выполнении условия $|x(\tilde{t}_{k+1}) - x(\tilde{t}_k)| \geq \Delta x = \text{const}$, когда значения показателей $\{x(\tilde{t}_i)\}$ фиксируются в узлах неэквидистантной ВС:

$$\{\tilde{t}_i\}, i = \overline{1, N}, \tilde{t}_i - \tilde{t}_{i-1} \neq \text{const}.$$

и далее в узлах ВС (1) вычисляются их соответствующие интерполированные значения.

На практике актуальной оказывается обратная задача – вычисление оценки значения показателя $\bar{H}$ на основе ВР $\{x_i\}, i = \overline{1, N}$, априори, полагаясь на некоторую реализацию ФБД:

$$\bar{H} = F(\{x_i\}, H), \quad (1)$$

где F – функционал, определяемый используемым алго-

ритмом вычисления $\bar{H}$ (например, метод накопленной дисперсии, R/S – анализ и т.д.), H – априори неизвестное значение показателя Херста (см., например, [3]–[7] и др.), которая, как видно из (1), будучи зависящей от некоторой случайной выборки $\{x_i\}, i = \overline{1, N}$, оказывается некоторой случайной величиной. При этом, необходимо отметить, что несмотря на отсутствие строгих теоретических доказательств соответствия значений $\bar{H}$ и H , авторы многочисленных публикаций, посвященных анализу самоподобных ВР, постулируют, что $\bar{H} \cong H$, и, далее, опираясь на который дают интерпретации наблюдаемых состояний тех или иных динамических систем.

В этой связи, целенаправленное исследование статистических характеристик выборок, составленных из значений оценок показателя Херста $\bar{H}$, с целью проверки гипотезы о том, что $\bar{H} \cong H$, оказывается актуальными.

II. МЕТОДИКА ИССЛЕДОВАНИЯ

Для исследования статистических характеристик оценок показателей Херста $\{\bar{H}_k(H_k)\}_m$, $m = \overline{1, 100}$ – номер реализации ФБД, $H_1 = 0.2$, $H_2 = 0.3, \dots, H_8 = 0.9$ – выбранные значения показателей Херста, была использована следующая методика.

1. Генерация, в соответствии с алгоритмом Фурье-фильтрации [3], программная реализация которого на языке Python, приведена в Приложении 1, для каждого H_k 100 независимых реализаций ФБД $\{x_i(H_k)\}_m$, $i = \overline{0, 2^{12}-1}$ – номер значения координаты ФБД.

2. Вычисление значений спектральных плотностей мощности каждого ВР $\{x_i(H_k)\}_m$:

$$\{S_i(H_k)\}_m = \left\{ \left| \sum_{n=0}^{N-1} x_n(H_k) e^{-2\pi j n i / N} \right|^2 \right\}_m,$$

где $j^2 = -1$, $N = 2^{12}$.

3. Вычисление ансамблей оценок показателей Херста по формуле:

$$\{\bar{H}_k(H_k)\}_m = |a_m(H_k)| - 0.5,$$

в которой $a_m(H_k)$ – угловой коэффициент прямой, аппроксимирующей методом наименьших квадратов зависимость:

$$\lg|\{S_i(H_k)\}_m|^{0.5} = f(\lg(f_i)),$$

где $f_i = i/N$, $i = N/2$ (см. рис. 1).

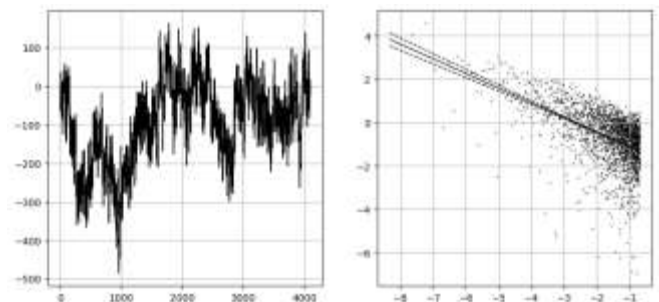


Рис. 1. Выбранная реализации ФБД ($H = 0.2$) (слева); результаты аппроксимации зависимости $\lg|\{S_i(H_k)\}_m|^{0.5} = f(\lg(f_i))$ ($\bar{H} = 0.176$) (справа)

4. Вычисление аппроксимаций Розенблатта-Парзена [8, 9] плотностей распределений $p_{RP}(H_k, h)$ и функций распределений

$$F_{RP}(h_{PR}, \{\bar{H}_k(H_k)\}_m, x) = \int_{\min(\{\bar{H}_k(H_k)\}_m)}^x p_{RP}(h_{PR}, \{\bar{H}_k(H_k)\}_m, \xi) d\xi,$$

где $x \in [\min(\{\bar{H}_k(H_k)\}_m), \max(\{\bar{H}_k(H_k)\}_m)]$.

5. Анализ значений квартилей аппроксимаций Розенблатта-Парзена функции распределения $F_{RP}(h_{PR}, \{\bar{H}_k(H_k)\}_m, x)$ случайных последовательностей $\{\bar{H}_k(H_k)\}_m$.

Примечания

1. Вычислительные процедуры, описанные в пп. 2, 3 методики исследования, основаны на теореме, доказанной в [3] (теорема 9.6.7), в соответствии с которой спектральная плотность мощности

$$S_x(f) = \left| \frac{1}{T} \int_0^T x(\xi) e^{2\pi j f \xi} d\xi \right|^2 \quad \text{ФБД } x(t) \text{ с параметром } H,$$

$0 < H < 1$, заданного на временном интервале $[0, T]$, описывается следующего вида зависимостью:

$$S_x(f) \propto 1/f^\beta, \quad \beta = 2H + 1,$$

где в качестве оценки $\bar{\beta}$ традиционно используется значение углового коэффициента прямой, аппроксимирующей зависимость $\lg(S_x(f)) = -\beta \lg(f)$, вычисляемого в соответствии с методом наименьших квадратов.

Принимая во внимание, что исследованные в данной работе реализации ФБД $\{x_i(H_k)\}_m$ представляют некоторые дискретные последовательности для вычисления их спектральных мощностей $\{S_x[k, n]\}_m$ использовалось ДПФ:

$$\{S_x[k, n]\}_m = \left| \frac{1}{\max(i)} \sum_{i=0}^{\max(i)-1} \{x_i(H_k)\}_m e^{2\pi j n / \max(i)} \right|^2,$$

где $n = 0, \max(i) - 1$, $j^2 = -1$, и далее в предположении,

что $\{S_x[k, n]\}_m \propto 1/(n/\max(i))^{\beta_{m,k}}$, с помощью метода наименьших квадратов по зависимости $\lg(\{S_x[k, n]\}_m) = -\beta_{m,k} \lg(n/\max(i))$, с помощью МНК

вычислялись оценки значений коэффициентов $\bar{\beta}_{k,m}$, связанные с искомыми оценками показателей Херста $\bar{H}_{k,m}$ соотношением: $\bar{\beta}_{k,m} = 2\bar{H}_{k,m} + 1$.

2. Метод Розенблатта-Парзена [8, 9] основан на представлении плотности распределения случайной выборки $\{\bar{H}_k(H_k)\}_m$ с помощью функции

$$p_{RP}(h_{RP}, x) = \frac{1}{N \cdot h_{RP}} \sum_{i=1}^{\max(m)} k \left(\frac{x - \{\bar{H}_k(H_k)\}_i}{h_{RP}} \right),$$

где $k(x) \geq 0$ – известная ядерная функция, h_{RP} – параметр, называемый полосой пропускания ядра или параметром размытости, значение которого определяет вид функции $p_{RP}(x)$. Перечень ядерных функций, которые могут быть использованы в методе Розенблатта-Парзена, приведен, например, в [10]. В данной работе было использовано нормальное ядро $k(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}}$.

Возможные значения его полосы пропускания h_{RP}^* вычислялись по известным аналитическим выражениям [11–13]:

$$h_{RP,1}^* = (4\bar{\sigma}^5 / (3N))^{1/5} \approx 1.06\bar{\sigma}N^{-1/5},$$

$$h_{RP,2}^* = 1.059A \cdot N^{-1/5},$$

$$h_{RP,3}^* = 0.9A \cdot N^{-1/5},$$

где $A = \min(\bar{\sigma}, \text{IQR}/1.34)$, здесь $\bar{\sigma}$ – оценка стандартного отклонения случайной выборки $\{\bar{H}_k(H_k)\}_m$; $\text{IQR} = Q_{0.75}(\{\bar{H}_k(H_k)\}_m) - Q_{0.25}(\{\bar{H}_k(H_k)\}_m)$, здесь

$Q_\alpha(\{\bar{H}_k(H_k)\}_m)$ – квартиль случайной выборки $\{\bar{H}_k(H_k)\}_m$ на уровне доверительной вероятности α .

Далее из $h_{RP,1,2,3}^*$ использовалось то значение, которое обеспечивало минимальное среднеквадратическое отклонение между эмпирической функцией распределения $F_{emp}(\{\bar{H}_k(H_k)\}_m)$ и соответствующими значениями функции $F_{RP}(h_{RP}^*, \{\bar{H}_k(H_k)\}_m, x)$. Отметим, что обсуждаемая аппроксимация Розенблатта-Парзена плотности распределения случайной выборки $\{\bar{H}_k(H_k)\}_m$ по выбранному критерию оказалась также наилучшей среди других известных ядерных функций $k(x)$.

Типичные гистограммы случайной выборки $\{\bar{H}(H = 0.2)\}_m$ и соответствующие графики функций $p_{RP}(h_{RP}^*, \{\bar{H}(H = 0.2)\}_m, x)$, $F_{emp}(\{\bar{H}(H = 0.2)\}_m, x)$, $F_{RP}(h_{RP}^*, \{\bar{H}(H = 0.2)\}_m, x)$ представлены на рис. 2, из которого видно, что данная выборка, извлечена из некоторой генеральной совокупности случайных величин с ограниченной областью рассеяния.

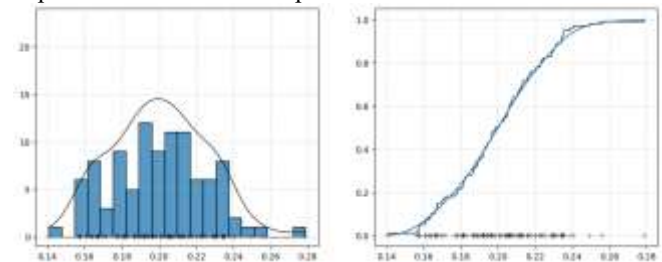


Рис. 2. Гистограмма ФБД, представленного на рис. 1, и соответ-

ствующая функция $p_{RP}(h_{RP}^* = 0.0092, \{\bar{H}(H=0.2)\}_m, x)$ (слева);

эмпирическая функция распределения и функция

$F_{RP}(h_{RP}^* = 0.0092, \{\bar{H}(H=0.2)\}_m, x)$ (справа). Внизу на обоих графиках

приведена диаграмма рассеяния ФБД

Математические модели обсуждаемых случайных величин, основы которых были заложены в работах А. Эйнштейна и М. Смолуховского (см. [14]), их свойства и результаты применения для решения практических задач представлены в [15–17].

III. СТАТИСТИЧЕСКИЙ АНАЛИЗ ВЫБОРОК, СОСТАВЛЕННЫХ ИЗ ОЦЕНОК ПОКАЗАТЕЛЕЙ ХЕРСТА НЕЗАВИСИМЫХ РЕАЛИЗАЦИЙ ФБД

Рассмотрим аппроксимации Розенблатта-Парзена плотностей распределений $p_{RP}(h_{RP}^*, \{\bar{H}_k(H_k)\}_m, x)$ и функций распределений $F_{RP}(h_{RP}^*, \{\bar{H}_k(H_k)\}_m, x)$, случайных последовательностей $\{H_k\}$, $k = \overline{1, 8}$, где

$$\{x\}_k \in [\min(\{\bar{H}_k(H_k)\}_m), \max(\{\bar{H}_k(H_k)\}_m)],$$

составленных из значений оценок показателей Херста независимых реализаций ФБД, вычисленных в соответствии с алгоритмом Фурье-фильтрации, представленные на рис. 3

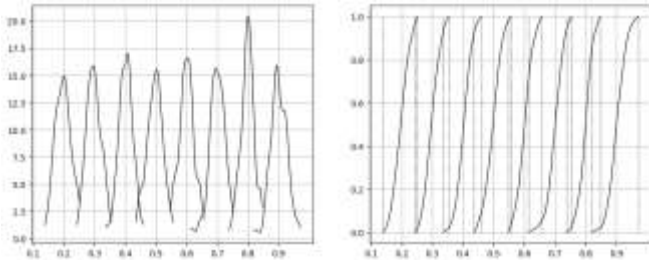


Рис. 3. Графики функций: $p_{RP}(h_{RP}^*, \{\bar{H}_k(H_k)\}_m, x)$ (слева);

$F_{RP}(h_{RP}^*, \{\bar{H}_k(H_k)\}_m, x)$ (справа)

Из рис. 3 видно.

1) Изученные выборки $\{\bar{H}_k(H_k)\}_m$, составленные из оценок показателей Херста, представляют собой некоторые множества случайных чисел с ограниченными областями рассеяния:

$$[\min(\{\bar{H}_k(H_k)\}_m), \max(\{\bar{H}_k(H_k)\}_m)];$$

$$2) \arg(\max_x(p_{RP}(h_{RP}^*, \{\bar{H}_k(H_k)\}_m, x))) \approx H_k;$$

$$3) [(x_1)_k, (x_2)_k] \cap [(x_1)_{k+1}, (x_2)_{k+1}] \neq \emptyset, \quad k = \overline{1, 7},$$

где $(x_1)_k = \min(\{\bar{H}_k(H_k)\}_m)$, $(x_2)_k = \max(\{\bar{H}_k(H_k)\}_m)$, то есть существуют такие значения оценок показателей Херста $\bar{H}_k$, в соответствие которым могут быть поставлены, одновременно, два соседних точных значения показателя Херста H_k, H_{k+1} , использованных для генерации независимых реализаций ФБД.

Данный вывод подтверждается графиком зависимости $H_k = f(\{\bar{H}_k\}_m)$, де-факто, представляющей собой «калибровочную кривую» исследуемого метода оценивания показателя Херста ФБД, представленным на рис.

4.

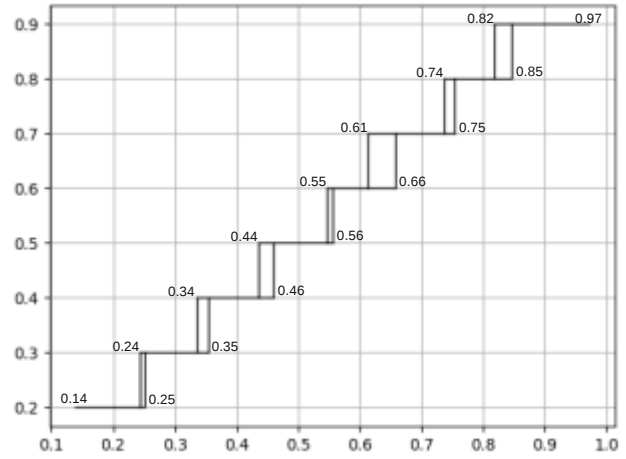


Рис. 4. Визуализация зависимости $H_k = f(\{\bar{H}_k(H_k)\}_m)$ в виде отрезков $[\min(\{\bar{H}_k(H_k)\}_m), \max(\{\bar{H}_k(H_k)\}_m)]$

Из рис. 4 видно, что значению $H_1 = 0.2$ соответствуют оценки показателя Херста, находящиеся в диапазоне $\bar{H}_1 \in [0.14; 0.24]$, значению $H_2 = 0.3$ – в диапазоне $\bar{H}_2 \in [0.25; 0.34]$; значению $H_3 = 0.4$ – в диапазоне $\bar{H}_3 \in [0.35; 0.44]$; значению $H_4 = 0.5$ – в диапазоне $\bar{H}_4 \in [0.46; 0.55]$; значению $H_5 = 0.6$ – в диапазоне $\bar{H}_5 \in [0.56; 0.61]$; значению $H_6 = 0.7$ – в диапазоне $\bar{H}_6 \in [0.66; 0.74]$; значению $H_7 = 0.8$ – в диапазоне $\bar{H}_7 \in [0.75; 0.82]$; значению $H_8 = 0.9$ – в диапазоне $\bar{H}_8 \in [0.85; 0.97]$. Также отметим, что существуют интервалы значений оценок показателя Херста $\bar{H}_k$, соответствующие одновременно двум значениям показателей Херста, использованным для генерации реализаций ФБД: $H_{1,2} = 0.2, 0.3$ – $\bar{H}_{1,2} \in [0.24; 0.25]$; $H_{2,3} = 0.3, 0.4$ – $\bar{H}_{2,3} \in [0.34; 0.35]$; $H_{3,4} = 0.4, 0.5$ – $\bar{H}_{3,4} \in [0.44; 0.46]$; $H_{4,5} = 0.5, 0.6$ – $\bar{H}_{4,5} \in [0.55; 0.56]$; $H_{5,6} = 0.6, 0.7$ – $\bar{H}_{5,6} \in [0.61; 0.66]$; $H_{6,7} = 0.7, 0.8$ – $\bar{H}_{6,7} \in [0.74; 0.75]$; $H_{7,8} = 0.8, 0.9$ – $\bar{H}_{7,8} \in [0.82; 0.85]$, что, с нашей точки зрения, обусловлено неизбежными погрешностями статистического моделирования. Отметим, что обсуждаемую зависимость можно аппроксимировать ступенчатой функцией, определенной на интервале $[0.15, 0.95]$:

$$\text{Step}(x) = \begin{cases} 0.2, & 0.15 < x \leq 0.25, \\ 0.3, & 0.25 < x \leq 0.35, \\ \vdots & \\ 0.9, & 0.85 < x \leq 0.95, \end{cases}$$

размеры элементарной ступеньки которой по осям абсцисс $\Delta \bar{H}$ и ординат ΔH определяются областью рассеяния случайных последовательностей $\{\bar{H}_k\}$ ($\Delta \bar{H} = 0.1$, ординаты – $\Delta H = 0.1$ (см. рис. 5).

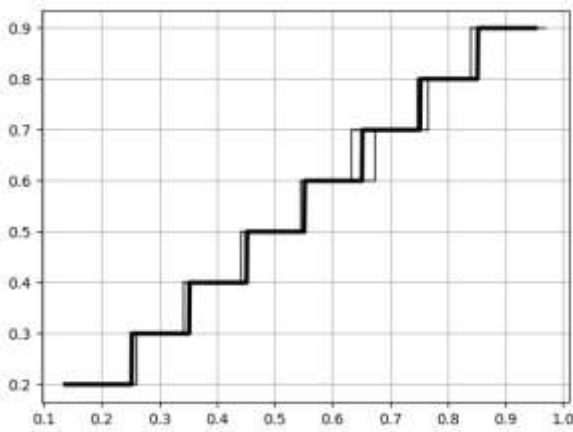


Рис. 5. Визуализация зависимости $H_k = f(\{\bar{H}_k\}_m)$ и ее кусочно-постоянной аппроксимации отрезками длины 0.1

IV. ОБСУЖДЕНИЕ РЕЗУЛЬТАТОВ

Таким образом, оказывается, что связь между действительными значениями показателей Херста $\{H_k\}$, $k = \overline{1, 8}$, и из соответствующими оценками $\{\bar{H}_k\}$ описывается не монотонной, но некоторой ступенчатой функцией $\text{Step}(x)$, размеры элементарной ступеньки которой по осям абсцисс $\Delta \bar{H}$ и ординат ΔH определяются областью рассеяния случайных последовательностей $\{\bar{H}_k\}$, значения которых $\Delta \bar{H}, \Delta H$ оказываются независимыми от «точного» значения показателя Херста $\{H_k\}$, $k = \overline{1, 8}$, использованного для генерации независимых реализаций ФБД.

На практике это означает, что по единственному значению оценки значения показателя Херста $\bar{H}$ ВР $\{x_n\}$, $n = \overline{1, N}$, который по предположению представляет собой некоторую реализацию ФБД, определить «точное» значения показателя Херста H данного ВР невозможно. Однако, можно установить соответствие между интервалом изменения аргумента функции $\text{Step}(\bar{H})$, в который попадает $\bar{H}$, и соответствующим данному интервалу ординаты $\tilde{H} = \text{Step}(\bar{H})$, которое с неизбежностью следует принять в качестве оценки «точного» значения показателя Херста H . При этом, важно понимать, что в общем случае обеспечить выполнение условия $H = \tilde{H}$ не возможно, так как данный эффект обусловлен не погрешностью использованного алгоритма вычисления оценки показателя Херста $\bar{H}$ ФБД, но неопределенностью, обусловленной природой оценок показателя Херста $\bar{H}$ ФБД, являющихся случайными числами с ограниченной областью рассеяния.

Данный результат, как очевидно, можно сформулировать в виде следующего правила: неопределенность точечной оценки показателя Херста ФБД $\bar{H}$, вычисленной на основе спектральной плотности мощности соответствующего ВР, совпадает с размером области рассеяния случайной последовательности, составленной из оценок показателей Херста $\{\bar{H}_k\}_m$, независимых реали-

заций ФБД, генерируемых на статистического моделирования с заданным значением показателя Херста H .

V. ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Анализ многочисленных публикаций, посвященных применению методов теории фракталов для анализа случайных ВР, изучаемых в различных областях науки, показывает, что, в подавляющем числе случаев для количественного сравнения степени «похожести» ВР $\{x_i^{(1)}\}, \{x_i^{(2)}\}$ друг на друга, используют оценки значений показателей Херста $\bar{H}^{(1)}, \bar{H}^{(2)}$, вычисляемые в соответствии с тем или иным алгоритмом оценивания фрактальной размерности ФБД. При этом полагают, что они полагают, взаимно однозначно связаны с состоянием динамической (динамических систем), породившей (породивших) данные ВР. В этой связи, результат $\bar{H}^{(1)} \neq \bar{H}^{(2)}$, трактуется как подтверждение произошедших изменений состояния динамической системы (например, состояния здоровья пациента в результате проводимого медикаментозного лечения) либо наличия различий в состоянии сравниваемых динамических систем.

При этом, однако, не принимается во внимание тот факт, что здесь сравниваются два выборочных значения оценок показателей Херста $\bar{H}^{(1)}, \bar{H}^{(2)}$, вычисленных на основе использования двух случайных ВР, которые, по указанной причине, сами являются случайными числами. В этой ситуации очевидно, что сравнивать между собой случайные числа $\bar{H}^{(1)}, \bar{H}^{(2)}$ без учета статистических характеристик генеральных совокупностей, из которых извлечены данные оценки, с точки зрения прикладной статистики неправомерно.

Необходимым условием вычисления адекватных оценок значения «точного» показателя Херста ФБД, как показывают результаты проведенных исследований, является наличие ансамбля независимых реализаций ФБД $\{x_i(H)\}_m$, для каждой из которых есть основания, априори, что «точные» значения показателя Херста H одинаковы. При наличии данного ансамбля оказывается возможным для каждой m -ой независимой реализации ФБД вычислить оценки показателей Херста $H_m = F(\{x_i(H)\}_m)$ и далее провести статистический анализ случайной выборки $\{H_m\}$, с целью нахождения ее плотности распределения, аргумент максимального значения которой соответствует искомому «точному» значению показателя Херста H .

Соответственно, сделанные ранее многочисленными авторами научных исследований выводы об обнаруженных ими изменениях состояний изученных ими динамических систем только на основе сравнения значений оценок $\bar{H}^{(1)}, \bar{H}^{(2)}$, вычисленных для использованных пар реализаций ФБД, при невыполнении условия $|\bar{H}^{(1)} - \bar{H}^{(2)}| \geq 0.1$, следует считать неправомерными.

Анализ статистических характеристик случайных последовательностей, составленных из оценок показателей

Херста, вычисленных в соответствии с другими известными алгоритмами, является предметом последующих публикаций.

VI. ПРИЛОЖЕНИЕ I

листинг функции, возвращающей значения
координат траектории ФБД, вычисляемые
в соответствии с алгоритмом Фурье-фильтрации

```
def FBM_FF(H, Level):

    N = 2 ** Level
    X = np.zeros(N) * 1j
    X[0] = random.gauss(0, 100)
    for i in range(1, N // 2 + 1):
        Tmp = random.gauss(0, 100) * \
            np.exp(2 * np.pi * 1j * \
                random.uniform(0, 1))
        X[i] = Tmp / i ** (H + 0.5)
    for i in (N // 2 + 1, N // 2 - 1):
        X[i] = np.conj(X[N - i])
    X = fft(X)
    return np.real(X - X[0])
```

БИБЛИОГРАФИЯ

- [1] B.B. Mandelbrot & J.W. Van Ness. Fractional Brownian Motions, Fractional Noise and Applications // SIAM Review, Vol. 10, № 4, 1968. P. 422–437.
- [2] Колмогоров А.Н. Спираль Винера и некоторые другие интересные кривые в гильбертовом пространстве // Доклады Академии наук СССР, 1940. Т. 26, № 1, с. 115–118.
- [3] R. Crownover, Introduction to Fractals and Chaos, Jones & Barlett Publishers, 1995. 306 с.
- [4] H. E. Hurst, Long-term storage capacity of reservoirs // Transactions of the American Society of Civil Engineers, 1951, Vol. 116, Issue 1, p. 770–799
- [5] E. Peters, Chaos and Order in the Capital Markets: A New View of Cycles, Prices, and Market Volatility John Wiley & Sons, 1996. 288 с.
- [6] Зиненко А.В. R/S-анализ на фондовом рынке // Бизнес-информатика. 2012. № 3(21). С. 24–30.
- [7] Шелухин О.И. Самоподобие и фракталы: телекоммуникационные приложения // О.И. Шелухин, А.В. Осин, С.М. Смольский / –М.: Физматлит, 2008. 368 с.
- [8] Rosenblatt M. Remarks on Some Nonparametric Estimates of a Density Function // The Annals of Mathematical Statistics. — 1956. — Т. 27, вып. 3. — doi:10.1214/aoms/1177728190.
- [9] Parzen E. On Estimation of a Probability Density Function and Mode // The Annals of Mathematical Statistics. — 1962. — Т. 33, вып. 3. — doi:10.1214/aoms/1177704472. — JSTOR 2237880.
- [10] Сызранцев В.Н. Расчет прочностной надежности изделий на основе методов непараметрической статистики // В.Н. Сызранцев, Я.Н. Невелев, С.Л. Голофаст // –Новосибирск: Наука, 2008 –128 с.
- [11] Silverman, B.W. (1982) Algorithm AS 176. Kernel density estimation using the Fast Fourier Transform. Journal of the Royal Statistical Society. Series C. 31.2, 93-9.
- [12] Silverman, B. W. (1986). Density Estimation for Statistics and Data Analysis. Chapman and Hall, London. <https://ui.adsabs.harvard.edu/abs/1986desd.book.....S>
- [13] Scott D. On optimal and data-based histograms // Biometrika. — 1979. — Т. 66, вып. 3. — doi:10.1093/biomet/66.3.605
- [14] Броуновское движение. Сборник статей. –М.-Л.: Издательство ОНТИ-НКТП-СССР, 1936. –607 с.
- [15] Поршнев С. В. Теория и алгоритмы аппроксимации эмпирических зависимостей и распределений / С. В. Поршнев, Е. В. Овечкина, В. Е. Каплан // –Екатеринбург: Издательство УрО РАН, 2006. –163 с.
- [16] Копосов А.С., Поршнев С.В. Случайные величины с ограниченной областью рассеяния: математическое и алгоритмическое обеспечение для оценивания плотностей вероятностей и функций распределений / А.С. Копосов, С. В. Поршнев // –М.: Горячая линия – Телеком, 2018. –184 с.

[17] Поршнев С.В., Божалкин Д.А. Математическое и алгоритмическое обеспечение для анализа характеристик информационных потоков в магистральных интернет-каналах / С.В. Поршнев, Д.А. Божалкин // –М.: Горячая линия-Телеком, 2021 –214 с.

On the specific nature of Hurst exponent estimates of the fractional Brownian motion

S. Porshnev, E. Solomaha

Abstract—The paper discusses the research results of the statistical sampling characteristics compiled from the Hurst exponent value estimates $\bar{H}_k = F(\{x_i(H_k)\}_m)$, where $F(\cdot)$ is an algorithm used to calculate the Hurst exponent estimates $\{x_i(H_k)\}_m$, $i = \overline{1, 2^{12}}$ – the m -th coordinate number of the independent implementation $\{x_i(H_k)\}_m$, $H_k = \{0.2, 0.3, \dots, 0.9\}$, $k = \overline{1, 8}$ – the range of the "exact" values of Hurst exponents, $m = \overline{1, 10^2}$ – the sequential number of the fBM independent implementation. The Fourier filtering algorithm has been used to generate independent fBM implementations $\{x_i(H_k)\}_m$. The Hurst exponent estimates of the generated fBM implementations $\{\bar{H}_k\}_m$ have been calculated based on the dependence analysis of the fBM power spectral densities $\{x_i(H_k)\}_m$:

$$\{S_x[k, n]\}_m = \left| \frac{1}{\max(i)} \sum_{i=0}^{\max(i)-1} \{x_i(H_k)\}_m e^{2\pi j n / \max(i)} \right|^2,$$

where $n = \overline{0, \max(i)-1}$, $j^2 = -1$, and further on the assumption that $\{S_x[k, n]\}_m \propto 1/(n/\max(i))^{\beta_{k,m}}$ with the aid of the least-square method the $\bar{\beta}_{k,m}$ coefficient values related to the desired Hurst exponent estimates $\bar{H}_{k,m}$ by the formula: $\bar{\beta}_{k,m} = 2\bar{H}_{k,m} + 1$, have been calculated.

Based on the analysis of the statistical sampling characteristics $\{\bar{H}_k\}_m$, $k = \overline{1, 8}$ the following reasonable conclusions are drawn.

- 1) The ensembles of Hurst exponent estimates $\{\bar{H}_{k,m}\}$ of fBM independent implementations $\{x_i(H_k)\}_m$, generated for the "exact" values of the Hurst exponent H_k represent sampling numbers taken at random with a limited scattering region. These scattering regions are 0.1-length segments, the midpoints of which are located at points with H coordinates.
- 2) Rosenblatt-Parzen approximations with a normal kernel and best values of a window for sample distribution densities $\{\bar{H}_{k,m}\}$ reach maximum values in the centre of the scattering region, the coordinate of which is congruent with the "exact" value of the Hurst exponent H_k .
- 3) The dependence $H_k = f(\bar{H}_k)$ is described by the step function:

$$\text{Step}(x) = \begin{cases} 0.2, & 0.15 < x \leq 0.25, \\ 0.3, & 0.25 < x \leq 0.35, \\ \vdots & \\ 0.9, & 0.85 < x \leq 0.95. \end{cases}$$

In this regard, there is uncertainty in establishing a one-to-one correspondence between the estimate $\bar{H}_k$ calculated for this implementation of the fBM and the "exact" value H_k because it is possible to establish a one-to-one correspondence only between the corresponding interval (step number) and the "exact" value H_k , which varies with increments $\Delta H = 0.1$. As a result, it is possible to draw a conclusion about the difference between the Hurst "exact" values $H^{(1)}, H^{(2)}$ of the two compared independent implementations of the fBM only when $|\bar{H}^{(1)} - \bar{H}^{(2)}| > 0.1$.

4) To calculate the estimates of the Hurst exponent of the fBM corresponding to the "exact" value of H_k , used for its generation, it is necessary to use ensembles of independent fBM implementations $\{x_i(H_k)\}_m$, for each of which, a priori, there are grounds that the "exact" values of their Hurst exponents H_k are the same.

Keywords—Hurst exponent, fractional Brownian Motion (fBM), Fourier filtering algorithm, the fBM spectral power density

REFERENCES

- [1] B.B. Mandelbront & J.W. Van Ness. Fractional Brownian Motions, Fractional Noise and Applications // SIAM Review, Vol. 10, № 4, 1968. P. 422-437.
- [2] Kolmogorov A.N. Spiral' Vinera i nekotorye drugie interesnye krivye v gil'bertovom prostranstve Doklady Akademii nauk SSSR, 1940. T. 26, № 1, c. 115-118. (in Russian)
- [3] R. Crownover, Introduction to Fractals and Chaos, Jones & Barlett Publishers, 1995. 306 c.
- [4] H. E. Hurst, Long-term storage capacity of reservoirs // Transactions of the American Society of Civil Engineers, 1951, Vol. 116, Issue 1, p. 770-799
- [5] E. Peters, Chaos and Order in the Capital Markets: A New View of Cycles, Prices, and Market Volatility John Wiley & Sons, 1996. 288 c.
- [6] Zinenko A.V. R/S-analiz na fondovom rynke // Biznes-informatika, Zinenko A.V. R/S-analiz na fondovom rynke // Biznes-informatika, 2012. № 3(21). C. 24-30. (in Russian)
- [7] Sheluhin O.I. Samopodobie i fraktaly: telekommunikacionnye prilozheniya, O.I. Sheluhin, A.V. Osin, S.M. Smol'skij, M: Fizmatlit, 2008. 368 c. (in Russian)
- [8] Rosenblatt M. Remarks on Some Nonparametric Estimates of a Density Function // The Annals of Mathematical Statistics. — 1956. — T. 27, вып. 3. — doi:10.1214/aoms/1177728190.
- [9] Parzen E. On Estimation of a Probability Density Function and Mode // The Annals of Mathematical Statistics. — 1962. — T. 33, вып. 3. — doi:10.1214/aoms/1177704472. — JSTOR 2237880.
- [10] Syzrancev V.N. Raschet prochnostnoj nadezhnosti izdelij na osno -ve metodov neparametricheskoj statistiki/V.N. Syzrancev, Ya.N. Nevelev, S.L. Golofast// —Novosibirsk: Nauka, 2008—128 s. (in Russian)
- [11] Silverman, B.W. (1982) Algorithm AS 176. Kernel density estimation using the Fast Fourier Transform. Journal of the Royal Statistical Society. Series C. 31.2, 93-9.
- [12] Silverman, B. W. (1986). Density Estimation for Statistics and Data Analysis. Chapman and Hall, London. <https://ui.adsabs.harvard.edu/abs/1986desd.book....S>

- [13] Scott D. On optimal and data-based histograms // *Biometrika*. — 1979. — Vol. 66, № 3. — doi:10.1093/biomet/66.3.605
- [14] Бруновское движение. Сборник статей. — М.-Л.: Издательство ONTI-NKTP-SSSR, 1936. — 607 с. (in Russian)
- [15] Поршневу С. В. Теория и алгоритмы аппроксимации эмпирических зависимостей и распределений/ С. В. Поршневу, Е. В. Овечкина, В. Е. Каплан// — Екатеринбург: Издательство УрОРАН, 2006. — 163 с. (in Russian)
- [16] Копосов А.С., Поршневу С.В. Случайные величины с ограниченными областями рассейания: математическое и алгоритмическое обеспечение для оценивания плотностей вероятностей и функций распределений/ А.С. Копосов, С. В. Поршневу// — М.: Горькая линия — Телеком, 2018. — 184 с. (in Russian)
- [17] Поршневу С.В., Божалкин Д.А. Математическое и алгоритмическое обеспечение для анализа характеристик информационных потоков в магистральных интернет-каналах/С.В. Поршневу, Д.А. Божалкин// — М.: Горькая линия-Телеком, 2021 — 214 с. (in Russian)